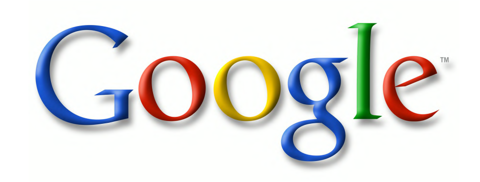




WIDENER LIBRARY
HX ISPW 0







HISTOIRE
DE
L'ACADEMIE
ROYALE
DES SCIENCES.

ANNÉE M. DCCXXX.

Avec les Mémoires de Mathématique & de Physique, pour la même Année.

Tirés des Registres de cette Académie.



A AMSTERDAM,

Chez PIERRE MORTIER.

M. DCCXXXIII.

Avec Privilege de N.S. les Etats de Hollande & de West-Frise.

PRIVILEGIE.

DE Staten van Holland en West-Friesland doen te weten, Alzo ons te kennen is gegeven by PIERRE MORTIER, Burger, en Boekverkoper binnen Amsterdam, hoe dat hy door inkoop aan zig verkregen hadde alle de Exemplaren, Regt van Copye, en Kopere Plaaten, van *Historia Academiæ Regiæ Scientiarum, Auctore J. B. du Hamel*, en *Histoire de l'Académie Royale des Sciences, avec les Mémoires de Mathématique & de Physique, tirés des Registres de cette Académie, commencée avec l'année* 1699, *jusques à présent*: Op welke Werken door Ons op den 22 January des Jaars 1706 goetgunstig Octroy was verleent aan wyle *Gerard Kuyper* om dezelve alleen met uytsluyting van alle andere geduurende den tyd van vyftien Jaaren, in zoo veele Deelen, Taalen, en Formaaten, als hy zoude goet vinden, te mogen drukken, doen drukken, uytgeven en verkopen, met een pœnaliteit van Drie hondert Guldens tegens de Overtreeders; En door dien het opgemelde Octroy reets zedert eenigen tyd geeindigt, en hy Suppliant werkelyk bezig zynde de gemelde werken van *Historia Academiæ Regiæ Scientiarum Auctore J. B. du Hamel*, en *Histoire de l'Académie Royale des Sciences, avec les Mémoires de Mathématique & de Physique, tirés des Registres de cette Académie*, van Jaare tot Jaare, met het drukken te vervolgen, en boven dien te vermeerderen met een *Recueil des Machines approuvées par l'Académie Royale des Sciences dont il est parlé dans l'Histoire & dans les Mémoires de cette Académie & autres, avec les Explications de Mrs. de l'Académie Royale des Sciences, enrichies de plus de* 200 *fig.* En een *Recueil de toutes les Pieces qui ont remporté les Prix proposés par l'Académie Royale des Sciences;* benevens eene *Table Alphabetique des Matieres contenues dans l'Histoire & les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, publiées dans son ordre.* En eindelyk nog alle de *Mémoires de Mathématique, de Physique & autres Pieces publiées par l'Académie Royale des Sciences, depuis son commencement jusques à l'année* 1698 *inclusivement;* wel verstaande van het laast-genoemde maar alleen die Stukken, of Deelen, die tot nog toe in de Provintie van Holland en West-Friesland nooyt waren gedrukt geweest; waar toe hy Suppliant zeer groote koste en moeyte genootzaakt was aan te wenden: En bedugt zynde dat eenige baatzugtige Menschen hem Suppliant in zyn voorneemen mogten willen contramineeren, of alle de voorgemelde Werken in het geheel

of ten deele, of onder eenige andere Tituls ofte Naamen na te drukken, doen drukken, en te verkoopen, tot overgroote schade van hem Suppliant; en om daar in te wezen gesecureert, zo keerde den Suppliant hem tot Ons, ootmoediglyk verzoekende dat Wy hem Suppliant goetgunstig geliefden te verleenen speciaal Octroy en Privilegie, omme alleen geduurende den tyd van vyftien eerstkomende Jaaren, te mogen drukken, doen drukken, uytgeven en verkopen, *Historia Academiæ Regiæ Scientiarum, Auctore J. B. du Hamel*, en *Histoire de l'Académie Royale des Sciences, avec les Mémoires de Mathématique & de Physique tirés des Regiſtres de cette Académie*, met alle de nog volgende deelen en stukken; en *Recueil des Machines approuvées par l'Académie Royale des Sciences, dont il est parlé dans l'Histoire & Mémoires de cette Académie & autres, avec les Explications de Mrs. de l'Académie Royale des Sciences, Enrichies de plus de 200 fig.* benevens een *Recueil des Pieces qui ont remporté les Prix proposés par Mrs. de l'Académie Royale des Sciences*, en een *Table Alphabetique des Matieres contenues dans l'Histoire & les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, publiées dans son ordre;* en Eindelyk nog alle de *Mémoires de Mathématique, de Physique, & autres Pieces publiées par l'Académie Royale des Sciences, depuis son commencement jusques à l'année 1698. inclusivement;* wel verstaende van het laest-genoemde Werk maer alleen alle die stukken ofte deelen, die tot nog toe, in de Provintie van Holland of West-Friesland nooyt waren gedrukt geweest; alles in zoo veele deelen, Taalen, en formaaten als hy Suppliant zoude mogen goet vinden, met speciaal verbod aen alle andere om dezelve Werken, of eenige van dien in het geheel, of ten deele, of onder andere Tituls of Naamen, na te drukken, te doen na drukken, ofte elders nagedrukt zynde in deze Provintie in te brengen, te verruylen ofte te verkopen, veel min eenige uyttreksels van dezelve, van wat natuure, naame, ofte in wat Taale dezelve souden mogen zyn, te moogen maaken ofte doen maaken, drukken of verkoopen, op een Boete van Drie-duysent Guldens, ofte soo veel het ons soude goed dunken tot meer affschrik, by de Contraventeurs te verbeuren, alsoo de Boete van Drie honderd Guldens in voorgaende Octroye van den 22 January 1706, tegens de Overtreders gestipuleerd, niet genoeg zynde om baetzugtige menschen van haer voorneemen tot merkelyke schade van den Suppliant af te schrikken, en de bovengemel-

de

de Werken voor den Suppliant van de grootste aangelegentheyt zynde. SOO IS 'T, Dat wy de zaake en de het voorsz: verzoek overgemerkt hebbende, ende genegen wezende ter beede van den Suppliant, uyt onse regte wetenschap, Souveraine magt, ende Authoriteit, den zelven Suppliant geconsenteert, geaccordeert, en geoctroyeert hebben, consenteeren, accordeeren, en octroyeeren hem by dezen, dat hy geduurende den tyd van vyftien eerst agter een volgende Jaaren, de bovengemelde Werken in dier voegen als zulks by den Suppliant is versogt, en hier vooren uytgedrukt staat, binnen den voorsz. Onsen Lande alleen sal mogen Drukken, doen Drukken, Uytgeven, ende Verkopen, verbiedende daeromme allen ende een ygelyken dezelve Werken in 't geheel ofte ten deele, te drukken, naer te drukken, te doen nadrukken te verhandelen of te verkoopen, ofte elders nagedrukt binnen dezelve onzen Lande te brengen, uyt te geven, ofte te verhandelen en verkoopen; op verbeurte van alle de naargedrukte, ingebragte, verhandelde ofte verkogte Exemplaaren, ende een Boete van Drie duysent Guldens daer en boven te verbeuren, te appliceeren een derde part voor den Officier die de Calange doen sal, een derde part voor den Armen der plaetse daer het Casus voorvallen sal, ende het resterende derde part voor den Suppliant, en dit telkens zo menigmael als dezelve sullen werden agterhaeld. Alles in dien verstaande, dat wy den Suppliant met desen onsen Octroye alleen willende gratificeeren, tot verhoedinge van zyne schaade door het nadrukken van de voorsz. Werken, daer door in geenigen deelen verstaen, den innehouden van dien te authoriseeren ofte te advoueren, ende veel min het zelve onder onse protectie ende bescherminge eenig meerder credit, aansien ofte reputatie te geven, nemaer den Suppliant in cas daer inne iets onbehoorlyks zoude influeren, alle het zelve tot zynen laste zal gehouden wesen te verantwoorden; tot dien eynde wel expresselyk begeerende dat by aldien hy desen onsen Octroye voor dezelve Werken sal willen stellen, daer van geene geabrevieerde ofte gecontraheerde mentie sal mogen maaken, nemaer gehouden wesen het zelve Octroy in 't geheel en sonder eenige omissie daer voor te drukken, of te doen drukken; ende dat hy gehouden sal zyn een Exemplaer van de voorsz. Werken op Groot papier, gebonden, en wel geconditioneert, te brengen in de Bibliotheecq van onse Universiteit te Leyden, binnen

den tyd van ses weeken, na dat hy Suppliant de voorsz. Werken sal hebben beginnen uyt te geven, op een boete van ses hondert Guldens, na expiratie der voorsz. ses weeken, by den Suppliant te verbeuren ten behoeven van de Nederduytse Armen van de plaats alwaar den Suppliant woont, en voorts op peene van met der daat versteeken te zyn van het effect van deesen Octroye: dat ook den Suppliant, schoon by het ingaan van dit Octroy een Exemplaar gelevert hebbende aan de voorsz. onse Bibliotheecq, by zoo verre hy gedurende den tyd van dit Octroy dezelve werken zoude willen herdrukken met eenige observatien, nooten, vermeerderingen, veranderingen, correctien of anders hoe genaemt, of ook in een ander formaat, gehouden sal zyn wederom een ander Exemplaar van deselve werken geconditioneert als vooren, te brengen in de voorsz. Bibliotheecq, binnen den zelven tyd, en op de boete en pœnaliteit als voorsz. Ende ten einde den Suppliant desen Onsen Consente ende Octroye mooge genieten als naar behooren, lasten wy allen ende eenen ygelyken dien het aangaan mag, dat zy den Suppliant van den inhouden van desen doen, laaten, ende gedoogen, rustelyk, vreedelyk, ende volkomentlyk genieten, ende gebruyken, cesseerende alle belet ter contrarie. Gegeven in den Hage, onder Onsen Groote Zegele hier aan doen hangen, op den negentienden December in 't Jaar onses Heeren ende Zaligmaakers, Duysent zeven hondert een en dertig.

J. G. V. BOETZELAER

Ter Ordonnantie van de Staten

WILLEM BUYS.

Aan den Suppliant zyn nevens dit Octroy ter hand gestelt by extract Authenticq, haar Ed: Gr: Mog: Resolutien van den 28 Juny 1715 en 30 April 1728, ten einde om sig daar na te reguleeren.

TA-

TABLE POUR L'HISTOIRE.

PHYSIQUE GENERALE.

ANATOMIE.

CHIMIE.

BOTANIQUE.

GEOMETRIE.

ASTRONOMIE.

GEOGRAPHIE. 144

MECHANIQUE.

Ma-



TABLE POUR LES MEMOIRES.

Métho-

TABLE.

Sui-

TABLE.



HISTOIRE
DE
L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES.
Année M. DCCXXX.

PHYSIQUE GENERALE.

SUR QUELQUES EXPERIENCES DE L'AIMAN. *

NOus supposons ici tout ce qui a été dit en 1728 †, sur des Expériences de l'Aiman, faites par M. du Fay. Il en résulte que le Tourbillon, qui se forme autour de tout Aiman, n'est pas double, comme M. Descartes l'avoit conçu, mais simple; toute la matiere magnétique entre par le Nord de l'Aiman, & sort par le Sud, pour rentrer ensuite par le Nord. Il faut déveloper un peu plus cette idée, pour l'intelligence de ce qui suivra.

On

* V. les M. p. 204. † p. 1. & suiv.

On doit concevoir un Aiman comme un corps où sont ouvertes une infinité de routes paralleles, telles que par quelque cause que ce soit la matiere magnétique qui pénétre ce corps s'y peut mouvoir en un certain sens, du Nord au Sud, & ne le pourroit du Sud au Nord. Et parce que cette matiere se meut avec beaucoup plus de facilité dans l'Aiman que dans l'air, lorsqu'après être entrée par le Nord de la Pierre elle en est sortie par le Sud, elle ne continue pas son chemin en ligne droite dans l'air, comme il semble qu'elle le devroit, mais elle se réfléchit pour retourner au Nord de l'Aiman, & rentrer par-là; c'est ce qui fait le Tourbillon. Tout cela, quoique sujet à de grandes difficultés, est si constant par les faits visibles, qu'on ne peut se dispenser de l'admettre, en attendant l'éclaircissement des difficultés.

Les Physiciens prennent la Terre pour un grand Aiman. La matiere magnétique entrée uniquement par le Nord de la Terre, selon M. du Fay, sort donc par le Sud. Si l'on suppose un Aiman ordinaire, posé de sorte que son Nord soit tourné vers le Nord de la Terre, la matiere magnétique sortie par le Sud de la Terre, & qui en va chercher le Nord, rencontre le Sud de l'Aiman par où elle ne peut entrer; & si cet Aiman est aisément mobile, comme il le sera étant posé sur l'eau dans une petite Gondole, elle le tournera de façon qu'elle le puisse pénétrer, c'est-à-dire, qu'elle fera prendre à son Nord la place de son Sud, & par conséquent le Sud de l'Aiman sera dirigé vers le Nord de la Terre.

Terre. Il peut y avoir de l'équivoque ou de l'embarras dans les expressions dont on se sert sur ce sujet, parce que c'est le Sud propre d'un Aiman qui se dirige vers le Nord de la Terre, & M. du Fay a cru devoir fixer les idées en ne distinguant les Poles d'un Aiman que par la direction qu'ils prennent.

Dans un Aiman les routes de la matiere magnétique sont déterminées, comme nous venons de le dire, elles ne lui permettent de se mouvoir qu'en un sens: mais le Fer, qui certainement est un Aiman imparfait, l'est en ce que ces mêmes routes n'y sont pas si déterminées; les petits poils dont il est hérissé intérieurement, peuvent se coucher en un sens, & après cela se coucher en sens contraire, selon qu'il a été expliqué en 1728, & par conséquent la même route admettra la matiere magnétique mûe tantôt en un sens, tantôt dans le sens opposé.

Voilà quels sont les principes essentiels du Systême de M. du Fay: il a songé à le fortifier, soit en l'employant à expliquer des phénomenes, qui ne l'ont pas été si heureusement jusqu'ici, soit en satisfaisant aux objections dont on pourroit l'attaquer.

La plupart des Physiciens prétendent que dans un Aiman le pole qui se dirige vers le Nord a beaucoup plus de force que l'autre, & ils croyent que la proximité du pole Boréal de la Terre en est la cause: mais sans compter que ce devroit être le contraire dans les païs situés au-delà de l'Equateur, ce qui n'est rien moins que certain, une Expérience, qui paroît décisive, renverse cette expli-

plication. M. du Fay a approché assez près l'un de l'autre deux Aimans assez égaux en force; il ne faut pas qu'ils se touchent, car ils ne feroient plus qu'un Aiman: il a plongé dans de la limaille de Fer le pole de l'un, qui en a pris autant qu'il en pouvoit porter. Si le voisinage du second a rendu ce premier capable de porter plus de limaille, il a dû en lâcher, en laisser tomber une partie, quand on a éloigné le second; c'est cependant ce qui n'est jamais arrivé dans l'Expérience bien répétée.

Ce fait se déduira sans peine de l'hypothese d'un Tourbillon, ou Courant unique. La matiere magnétique une fois entrée dans un Aiman n'en sort, pour ainsi dire, que le plus tard qu'elle peut, parce qu'elle trouve beaucoup plus de facilité à s'y mouvoir que dans l'air; quand elle est entrée, elle sortoit de l'air, elle n'avoit qu'un mouvement pénible, elle est entrée toute dispersée, & a pris une assez grande étendue autour du pole qui se présentoit: mais quand il a été question de sortir de la pierre, elle y a prolongé son cours autant qu'il se pouvoit pour éviter l'air, & par-là elle s'est rassemblée & serrée vers le pole de la sortie. Or le pole de l'entrée a été le Nord de l'Aiman dirigé vers le Sud de la Terre, & le pole de la sortie est le Sud de l'Aiman dirigé vers le Nord de la Terre. Delà suit évidemment la conséquence.

M. du Fay assure en général, que l'hypothese du Courant simple s'accommodera mieux avec les phénomenes de l'Aiman, & il fait voir qu'elle quadreroit fort bien avec l'idée

qu'a

qu'a eue le célébre M. Halley, de rapporter les Aurores Boréales à la matiere magnétique. Mais cette idée n'eſt pas encore elle-même aſſez établie, pour donner beaucoup de poids à celles qu'elle confirmeroit.

On objecte à l'hypotheſe de M. du Fay, que le Courant unique formé d'une matiere ſortie par le Sud de la Terre, & qui va retrouver le Nord, pouſſeroit ſelon la direction du Sud au Nord tous les Aimans qui pourroient ſe mouvoir librement, & leur donneroit en ce ſens un mouvement de progreſſion, au-lieu qu'ils n'ont conſtamment que celui de direction, par lequel leurs poles ſe tournent comme il convient. On ne doit pas trouver cet inconvénient dans l'hypotheſe des deux Courans, qui étant oppoſés, ſe balancent l'un l'autre. La réponſe eſt aiſée. La matiere magnétique qui va du Sud au Nord pouſſeroit en effet l'Aiman ſelon cette direction, ſi en venant heurter ſa ſurface extérieure elle y trouvoit de la réſiſtance; mais elle n'y en trouve aucune, elle ne la heurte pas, elle la pénétre dès qu'elle la rencontre, & ſe plonge dans l'intérieur de la pierre. On ſait que cette extrême facilité de la matiere magnétique à pénétrer l'Aiman n'a pas été imaginée pour le beſoin préſent, mais qu'elle eſt établie depuis longtems par les phénomenes. Cette matiere n'agit que ſur les parties intérieures de l'Aiman, qu'elle arrange & qu'elle accommode à ſon cours, mais ce ne ſont que celles qui ſont de la derniere fineſſe.

Il ſuit de-là, qu'elle ſe meut dans des eſpaces extrêmement étroits, & d'où l'air eſt ex-

clus ; & cela même fournit à M. du Fay une réponse à l'objection qu'on lui a faite contre les petits poils du Fer, qu'il a supposé qui tomboient par leur poids d'un sens ou d'un autre. Ce poids, a-t-on dit, doit être compté pour nul à cause de l'extrême délicatesse des poils. Il devroit être effectivement compté pour nul, si les poils étoient dans l'air ; mais ils n'y sont pas, & il leur arrive la même chose qu'à une Plume, qui dans le Vuide de la Machine Pneumatique tombe avec la même vîtesse, ou a le même poids, que si elle étoit de Plomb.

La vîtesse de la matiere magnétique doit être proportionnée à sa subtilité, & à cette occasion M. du Fay a eu la pensée de mesurer cette vîtesse. Il a conçu que si une Aiguille de Fer non aimantée passoit dans le Tourbillon d'un Aiman avec la même vîtesse dont ce Tourbillon se meut, elle ne s'y aimanteroit point, parce que la matiere magnétique du Tourbillon ne pourroit faire aucune impression sur elle. Il y a fait passer une Aiguille avec toute la vîtesse qu'elle avoit pu prendre de la détente subite d'un Ressort de Montre, mais elle s'est aimantée comme elle auroit fait à la maniere ordinaire, & par conséquent elle auroit eu besoin d'une vîtesse beaucoup au-delà de celle qu'elle avoit. Il n'est pas permis de conjecturer seulement jusqu'où cela pourroit aller. Cette tentative inutile n'est rapportée ici que pour donner lieu à d'autres qui pourroient réussir : quelquefois il ne faut qu'avertir les bons esprits de tourner leurs vues d'un certain côté.

Pour

Pour derniere preuve des petits poils du Fer, & des qualités qu'on est obligé de leur attribuer, M. du Fay apporte la difference des effets magnétiques du Fer, de l'Acier & de l'Acier trempé. Cette transposition de poles, dont nous avons parlé en 1728, si facile & si prompte dans le Fer, l'est beaucoup moins dans l'Acier, & moins encore dans l'Acier trempé; &, ce qui en est une suite, l'Acier trempé, toutes choses d'ailleurs égales, a plus de force, & une force plus durable que l'Acier, & l'Acier plus que le Fer. La raison en saute aux yeux; les poils du Fer ont perdu leur extrême mobilité, & se sont roidis plus ou moins, ou collés les uns contre les autres, ou avec les parties voisines.

Toute cette Théorie n'est pas une pure Théorie, qui ne produise rien. M. du Fay en tire quelle est la meilleure maniere d'aimanter les Aiguilles, & on la devinera de soi-même, pourvu qu'on ait une idée bien nette du Tourbillon unique, de sa direction, des petits poils du Fer. On travaille avec une sorte de supériorité sur sa matiere, quand on opere en vertu d'un Systême.

SUR LA LUMIERE SEPTENTRIONALE, ET SUR UNE AUTRE LUMIERE.

LE ſpectacle de la Lumiere Septentrionale a continué en 1730, rarement à la vérité, mais en recompenſe avec des circonſtances toutes nouvelles, comme s'il les affectoit de peur d'ennuyer.

M. Bouillet, Correſpondant de l'Académie, dont nous avons déja parlé pluſieurs fois, la vit à Beſiers le 6 Mars, à 7 heures du ſoir, d'un fort beau rouge, élevée de plus de 20 degrés ſur l'Horizon; mais la Lune, qui ſe leva à 7 heures 30', la fit diſparoitre, & il ne fut que ſur le rapport de quelques Pêcheurs de Vendres, qu'elle avoit été vue encore à 11 heures.

Une Lumiere, & plus viſible, & tout-à-faït ſinguliere, fut obſervée le ſoir du 9 Octobre, d'un côté par M. Caſſini en Picardie, & de l'autre par M. de Mairan à Breuilpont. M. de Mairan qui commença à l'obſerver à 8 heures, & qui ſe tient ſûr qu'elle ne commença pas plutôt, la vit à la place, de la couleur, & de la forme ordinaire des Aurores Boréales, c'eſt-à-dire, ſans jets & ſans colomnes qui en partiſſent, longue de 9 à 10 degrés, dont elle s'étendoit horizontalement vers le Midi, à compter des Pleïades d'où elle

elle partoit, & large de 4 degrés. Mais 7 ou 8 minutes après, elle commença à s'ébrecher vers le milieu, comme pour se diviser, & se divisa en effet en deux Ovales lumineuses inclinées à l'Horizon, longues chacune de 15 à 18 degrés, sur 5 à 6 de largeur, entre lesquelles on voyoit les Pleïades qui les séparoient. Ce fut en cet état que M. Cassini vit le Phénomene à 7 heures 20'. Alors, qui ne l'avoit pas vu dans sa premiere forme, ne le pouvoit guere reconnoitre pour une Aurore Boréale.

Ensuite les deux Ovales s'affoiblirent de clarté, & changerent de contours ou de figure, mais inégalement & differemment l'une & l'autre, & enfin un peu après 9 heures, elles ne subsistoient plus.

Cependant à 10 heures ½ ou 11 heures, M. de Mairan vit surement l'Aurore Boréale, foible, à la vérité, mais à sa place naturelle & sous l'Etoile Polaire. Elle étoit contiguë à l'Horizon, sans interposition de nuages obscurs, elle y étoit plus marquée que par-tout ailleurs. Elle alla en s'affoiblissant jusque vers minuit, où l'Observateur la quitta.

Le P. Rouché, Religieux de l'Ordre de S. François, observa aussi à Poitiers le même Phénomene du 9 Octobre, depuis 8 heures du soir jusqu'à 9, mais il le vit sous une autre forme que Mrs. Cassini & de Mairan, quoiqu'à peu près dans le même lieu du Ciel. C'étoit d'abord un demi-Cercle, dont le diametre, tourné en haut, étoit parallele à l'Horizon, & long de plus de 20 degrés. Ensuite ce demi-Cercle se partagea en deux autres moin-

moindres & contigus par leurs diametres, qui faisoient une même droite, parallele encore à l'Horizon. Ces figures si régulieres ne durerent pas longtems, les deux petits demi-Cercles se réunirent pour former un plus grand Cercle presque entier, mais très mal terminé dans la portion qui lui manquoit. Enfin cela devint une espece de Segment de Cercle qui finissoit par un Trident, dont les dents étoient fort longues & bien séparées. Ces apparences-là sont assez differentes des autres, & peut-être difficiles à concilier avec elles. Tout le Phénomene avoit une très grande blancheur, & un mouvement très lent.

Jusqu'ici nous n'avons rapporté que des Aurores ou Lumieres Septentrionales, differentes seulement entre elles par des circonstances plus ou moins particulieres. Mais voici enfin une Lumiere differente par l'endroit qui paroît leur être le plus essentiel, une Lumiere entierement Méridionale. Elle fut vue à Bésiers le 15 Février de cette année, par Mrs. Bouillet & Astier l'aîné, trois quarts d'heure après le coucher du Soleil. Elle commençoit à l'endroit où il s'étoit couché, passoit du côté de l'Occident par les dernieres Etoiles des Poissons, s'élevoit vers le Zénith jusqu'à l'Oeil du Taureau, & se terminoit dans la constellation du Lion, en suivant, mais non pas toujours exactement, la position & le cours de l'Ecliptique. On voit par-là qu'elle étoit toute Méridionale, beaucoup plus remarquable & plus parfaite sur ce point que le demi-grand Cercle vertical, dont nous

avons

avons parlé en 1729, & qui jusque-là étoit unique.

Cette Lumiere formoit une Zone ou bande d'environ 10 degrés de largeur, & qui dans sa plus grande hauteur étoit élevée de 52 degrés sur l'Horizon. Elle étoit fort rouge, & selon l'ordinaire de ces Phénomenes, n'effaçoit pas les Etoiles qu'elle couvroit. Au-delà de cette Zone rouge, il y avoit vers le Midi une autre Zone de Lumiere blanchâtre, presque contiguë à la premiere du côté de l'Orient, & qui s'en éloignoit en allant vers le Méridien; & au-dessous de cette Lumiere blanche étoit un nuage obscur, qui s'étendoit jusqu'à l'Horizon, tandis que le reste du Ciel étoit fort serein.

Par la position qu'avoit la Lumiere rouge rapportée aux Etoiles fixes, M. Astier s'apperçut que cette position changeoit, & que la Lumiere avoit un mouvement, mais assez petit, du Nord au Sud. La Lumiere blanche, qui se tenoit toujours à la même distance de l'autre, en avoit un pareil.

Les deux Observateurs eurent des affaires, qui ne leur permirent pas de pousser l'observation au-delà de 8 heures ½. Ils ne virent point d'Aurore Boréale: seulement M. Astier, qui se retira le dernier, en soupçonna une en se retirant; mais elle a été vue surement ailleurs dans le même Païs. Par les observations de M. de Guibal, qui étoit à S. Chignan, M. Astier conjecture qu'il y avoit quelque correspondance entre la Lumiere Méridionale & la Septentrionale, parce que la premiere baissoit, tandis que l'autre s'élevoit; mais on n'a rien d'assez positif sur ce point.

Quelque differentes que ſoient ces deux Lumieres par leur poſition, elles ſont d'ailleurs ſi ſemblables, que la préſomption eſt grande pour la correſpondance.

Comme depuis 15 ans, que nous parlons toujours de cette matiere, il ſemble qu'elle ne fait que s'embarraſſer de plus en plus par la multitude & la varieté des circonſtances & des accidens du Phénomene, peut-être ferons-nous plaiſir au Public, d'annoncer que M. de Mairan a entrepris de réduire le tout à un Syſtême règlé, qui paroitra dans peu.

SUR UNE NOUVELLE CONSTRUCTION DE THERMOMETRE. *

ON ſait aſſez par ſes propres réflexions, pour peu qu'on en ait fait en obſervant le Thermometre, combien cet Inſtrument ſi commode, d'un ſi grand uſage, & même ſi agréable, eſt cependant défectueux; nous ne parlons que de celui de Florence ou de Sanctorius, qui eſt preſque le ſeul, car celui de M. Amontons, dont nous avons parlé en 1702 †, eſt peu connu & peu uſité, quoique conſtruit ſur de meilleurs principes, & d'une maniere fort ingénieuſe; mais comme il eſt d'une conſtruction difficile, & qui demandoit, du moins pour un tems, la main de l'Auteur lui-même, ſa mort, qui ſurvint, empêcha qu'il

* V. les M. p. 615. † p. 1. & ſuiv.

qu'il ne s'en répandît un assez grand nombre.

Nos Thermometres ordinaires marquent, à la vérité, les differens degrés de chaud ou de froid, mais chacun les marque pour soi & à sa maniere, parce qu'ils ne sont partis d'aucun point de chaud ou de froid, qui leur fût commun. C'est ainsi que deux Pendules qui n'auroient pas été mises d'abord sur la même heure au Soleil, marqueroient bien chacune, que pendant un certain tems il se seroit écoulé une heure, deux heures, &c. mais non pas quelle heure il seroit au Ciel. De plus, en supposant les deux Pendules justes, on pourroit bien s'assurer que le même tems se seroit écoulé, quand elles le marqueroient toutes deux; mais on ne peut pas s'assurer pareillement que quand la liqueur s'est élevée d'un degré dans deux Thermometres differens, il y ait eu de part & d'autre un nouveau degré de chaleur égal; car 1°. l'Esprit de Vin peut n'être pas le même dans les deux Thermometres, & selon qu'il sera plus ou moins bien rectifié, il se dilatera plus ou moins à une même chaleur, ou, ce qui revient au même, celui qui a été bien rectifié se dilatera & montera d'un degré à une certaine chaleur, tandis que l'autre ne sera monté du même degré qu'à une chaleur plus forte. 2°. En graduant les Thermometres, on prend pour degrés égaux de l'ascension de la liqueur, des parties égales de la longueur des tuyaux: cependant en supposant les diametres des tuyaux d'une égalité parfaite, ce qui est tout au moins très difficile, ils ont souvent dans leur intérieur des

la glace naturelle qu'on employera feroit plus ou moins froide, il faudra s'en tenir au point où la premiere furface de l'eau, qui fe gelera artificiellement, fera prife, car, felon la remarque de M. de Reaumur, cette premiere action du froid doit être toujours affez égale, & il ne peut guere furvenir d'inégalités que dans la fuite par une efpece d'accélération plus ou moins forte. Quand de la matiere, dont le mouvement caufoit & entretenoit la liquidité, une eau en a affez perdu pour n'être plus liquide dans fa furface, il paroît qu'une autre eau en doit perdre précifément autant pour fe trouver au même état; quoique les caufes de froid, qui agiffent fur l'une & fur l'autre, ne foient pas exactement égales, ce ne fera que leur action continuée qui rendra leur difference fenfible. Après tout, il ne s'agit en tout ceci que d'égalités phyfiques, qui ne peuvent jamais être auffi juftes que les géométriques.

Le froid de la congélation artificielle de l'eau étant pris pour point fixe, & en même tems, fi l'on veut, la chaleur de l'eau bouillante, il faut graduer un Thermometre par rapport à ces points, c'eft-à-dire, le divifer en degrés égaux, tels que l'Efprit de Vin y montera depuis un froid plus grand que celui de la congélation jufqu'à cette congélation, & delà jufqu'à la chaleur de l'eau bouillante. M. de Reaumur a pris une idée fort nouvelle fur cette graduation. Les degrés égaux le font, non par rapport à la longueur du tuyau, nous en avons vu l'erreur manifefte, mais par rapport aux dilatations de la liqueur; fi le volu-

me

me de la liqueur eſt de 100 parties, le Thermometre marquera 1 degré, quand ce volume ſera augmenté de $\frac{1}{100}$ partie par la dilatation, 2 degrés quand il ſera augmenté de $\frac{2}{100}$, &c. ainſi les inégalités intérieures du tuyau ne ſont plus à craindre, & quelles que ſoient celles qui s'y trouveront, il n'en arrivera autre choſe, ſinon que des degrés égaux de dilatation ſeront des degrés inégaux ſur la longueur du tuyau. Les yeux n'en ſeront peut-être pas ſi contents, mais on aura l'avantage réel & ſolide de ſavoir au juſte de combien une liqueur a augmenté ſon volume par la chaleur, juſqu'où elle le peut augmenter, combien elle eſt de tems à prendre cette augmentation, quel eſt ſon rapport de dilatabilité à une autre liqueur: inſtructions qu'on ne pouvoit pas tirer des anciens Thermometres, qui n'en diſoient rien, ou ne le diſoient que d'une maniere équivoque & confuſe.

Graduer le Thermometre ſelon des degrés égaux d'augmentation de volume, c'eſt le graduer ſelon des degrés égaux de capacité de la boule & du tuyau. Que la boule ſeule, ou la boule, & une certaine partie du tuyau, ſi l'on veut, contiennent juſte 100 parties égales d'eau, chacune de ces parties étant d'une quantité bien exactement connue, il eſt clair que ſi enſuite on en verſe une nouvelle dans le tuyau, une 2de, une 3me, &c. & que l'on marque les endroits où la liqueur totale du tuyau ſe ſera élevée, on aura des degrés égaux de la capacité du tuyau, & par conſéquent auſſi de la dilatation d'une liqueur qui en ſe raréfiant monteroit à ces differens en-

endroits marqués ; car la capacité du Thermometre ayant été mesurée de cette maniere, on ôtera toute l'eau, qui n'a servi qu'à mesurer, & on y mettra l'Esprit de Vin dont on veut observer la dilatation.

Le nombre des degrés de division est arbitraire, mais il ne laisse pas de demander un choix. 100 est trop petit ; un plus grand nombre donnera des divisions plus fines, & le Thermometre en sera à cet égard ce qu'on appelle plus *sensible.* * M. de Reaumur juge plus commode de prendre toujours des centaines, & il va jusqu'à 1000. Par-là il évite le plus souvent les fractions de degré, & quand il s'en trouve, elles sont assez petites pour pouvoir être négligées.

Quand on a gradué avec de l'eau la capacité du Thermometre, il a fallu déterminer l'endroit où l'on veut que soit l'Esprit de Vin après s'être condensé par la congélation artificielle. Cet endroit sera à peu près au tiers de la longueur du tuyau à compter de la boule, car l'Esprit de Vin peut ensuite se dilater de plus du double par la chaleur. Il faut que cet endroit soit le nombre de la division choisie, par exemple, 1000, si la division est 1000. Lorsqu'on aura versé l'Esprit de Vin, & qu'on viendra à le condenser par la congélation, s'il est au-dessus ou au-dessous de l'endroit marqué, on lui ôtera, ou bien on lui ajoutera la quantité nécessaire pour l'amener au point requis, & alors on sera sûr qu'on a le volume de 1000 parties connues d'Esprit de Vin condensées par la congélation artificielle.

En voilà assez pour faire entendre en général

néral les principes de la nouvelle construction. Le plus important, c'est l'exactitude parfaite des mesures. Il en faut d'abord de petites, dont chacune contienne ce qu'on appelle une partie, ou de l'eau, ou de l'Esprit de Vin; & M. de Reaumur en indique de si justes, qu'elles ne perdront pas par le mouvement, ni par le transport nécessaire, une seule goutte de la liqueur qu'elles contiendront. Il faut ensuite pour hâter l'ouvrage, en avoir de plus grandes, qui contiendront ces petites un certain nombre de fois précis. Il vaut mieux que ce nombre soit une aliquote de 100, comme 25. Mais nous supprimons tous ces détails, quoiqu'instructifs, & souvent curieux; on les apprendra du Mémoire de M. de Reaumur, & encore mieux de la pratique.

Dans les Thermometres communs on a adapté à une assez grosse boule un tuyau délié & presque capillaire, afin qu'une très petite augmentation de volume dans la liqueur de la boule en produisît une grande & bien sensible dans la liqueur du tuyau. C'en étoit assez pour voir que la liqueur étoit raréfiée, dès qu'elle l'étoit, & même qu'elle l'étoit plus ou moins, & l'on ne s'embarrassoit pas de savoir de combien elle l'étoit précisément. Mais dans les Thermometres nouveaux où l'on veut arriver à cette connoissance, qui ne peut résulter que de la mesure exacte des volumes, il est inévitable que les tuyaux soient beaucoup plus gros, parce que l'exactitude & la sensibilité du Thermometre, à mesure qu'on les veut plus grandes, demandent un plus grand nombre de parties de liqueur, & que quelque

pe-

petites que soient ces parties, elles font un tout considerable. M. de Reaumur est donc obligé de choquer l'habitude des yeux, & de renoncer à l'agrément du tuyau capillaire. Ce n'est pas la peine de plaider ici la cause de l'utilité & de la justesse, contre un agrément si leger. Cependant par une espece de condescendance, les nouveaux Thermometres pourront avoir des tuyaux qui ne seront pas plus gros que ceux des gros Barometres, auxquels on est assez accoutumé.

M. de Reaumur hazarde encore une autre difformité de ce genre. On dit qu'un Thermometre est plus ou moins sensible, selon qu'une même raréfaction ou condensation arrivée à la liqueur de la boule, est marquée sur le tuyau dans une plus grande ou moindre étendue. M. de Reaumur imagine avec raison une autre sorte de sensibilité. Elle consistera dans la promptitude avec laquelle la liqueur sentira l'action du chaud ou du froid; & la marquera. Comme les boules de ses Thermometres seront plus grosses qu'à l'ordinaire, il a fait réflexion qu'il leur faudroit nécessairement plus de tems pour recevoir jusqu'à leur centre, & dans la totalité de la liqueur, l'action du chaud ou du froid de l'air extérieur. Un remede très simple à cet inconvénient est que les boules, sans rien perdre de leur capacité, soient applatties autant qu'on le jugera à propos: mais il est vrai que les yeux pourront encore le trouver mauvais, du moins dans les commencemens. Peut-être aussi que ces nouveautés de construction seront d'autant plus agréables qu'elles

les feront plus marquées, parce qu'elles promettront plus fenfiblement une plus grande juſteſſe.

On ne peut guere comparer deux anciens Thermometres, ce qui les rend aſſez inutiles pour des recherches phyſiques un peu délicates. Le plus ou le moins d'élevation de la liqueur dépend du rapport de la capacité ou du diametre de la boule à la capacité ou au diametre du tuyau. Plus le diametre de la boule eſt grand par rapport à celui du tuyau, plus la liqueur monte haut par un même degré de chaleur. Pour comparer deux Thermometres differens, ou les degrés de chaleur qui ont agi ſur chacun d'eux, il faudroit ſavoir quel eſt dans chacun le rapport de ces diametres; mais on ne le ſait point, & on ne le peut ſavoir, ne fût-ce qu'à cauſe des inégalités intérieures des boules & des tuyaux, qui ſont toujours inconnues, car il ſe trouveroit encore d'autres difficultés. Dans les Thermometres de M. de Reaumur, il ne s'agit plus du tout de ce rapport des diametres des boules & des tuyaux; dès que le point où s'arrête l'Eſprit de Vin condenſé par la congélation artificielle eſt marqué ſur deux Thermometres, & je ſuppoſe ce point inégalement élevé dans les deux, & dès que l'on ſait que de part & d'autre l'Eſprit de Vin a un certain nombre de parties égales entre elles dans chaque Eſprit de Vin, il n'en faut pas davantage, les deux Thermometres marqueront toujours les mêmes degrés de chaleur, quoique ces degrés puiſſent être inégaux dans l'étendue qu'ils tiendront ſur le tuyau.

tuyau. Quand un Esprit de Vin qui aura, par exemple, 400 parties égales, montera d'un degré au-dessus de la congélation, ou, ce qui est le même, aura augmenté son volume de $\frac{1}{400}$, & quand un autre Esprit de Vin qui aura 500 parties élémentaires, pour ainsi dire, égales entre elles, & égales à celles du premier, sera monté d'un degré au-dessus de la congélation, ou aura augmenté son volume de $\frac{1}{500}$, ce sera toujours le même degré de chaleur qui aura causé la même raréfaction dans les deux volumes differens, quelle que soit d'ailleurs l'étendue dans laquelle ce degré sera marqué à cause de la differente capacité des boules & des tuyaux des deux Thermometres. Si les parties élémentaires d'un Esprit de Vin ont été prises plus grandes que celles de l'autre, mais en même nombre, les degrés d'un des Thermometres seront naturellement plus grands, mais un degré d'élevation plus grand ne sera que l'effet de la même chaleur. Ce sera la même chose, si les parties élémentaires sont prises plus grandes, & en plus grand nombre. Il seroit bon que l'on convînt d'un même nombre total, comme de 1000, pour le nombre de ces parties condensées par la congélation.

Il y a ici une remarque importante à faire, d'après M. de Reaumur. Chacun de ces degrés inégaux en étendue dans deux Thermometres, & peut-être dans le même, marquera bien un degré égal de la dilatation de l'Esprit de vin, mais non pas un degré égal de chaleur. Il n'est pas sûr que la chaleur, toujours augmentée par degrés égaux, produi-

se

ſe dans l'Eſprit de vin des augmentations égales de volume; il eſt poſſible qu'à meſure qu'elle croît également, elle trouve toujours ou d'autant plus de facilité ou d'autant plus de difficulté à raréfier l'Eſprit de vin, que les premieres dilatations coutent à la même cauſe plus ou moins d'effort que les dernieres: cette inégalité eſt plus que vraiſemblable, & l'une & l'autre progreſſion de l'inégalité l'eſt à peu près également. Nous pouvons ajouter encore, quoiqu'il ne s'agiſſe ici que de la même liqueur, qu'une liqueur peut ſe raréfier ſelon la progreſſion croiſſante, & une autre ſelon la progreſſion décroiſſante. Deux Thermometres, où l'Eſprit de vin ſera inégalement élevé, marqueront donc ſeulement que l'un aura reçu un certain nombre de degrés de chaleur plus que l'autre, mais non pas quel ſera le rapport de ces differens degrés entre eux. M. de Reaumur ne croit pas qu'on puiſſe arriver à cette connoiſſance exacte, tant il eſt arrêté qu'il reſtera toujours beaucoup d'obſcurité dans nos lumieres.

Tout ce que nous avons dit juſqu'ici, ſuppoſe que l'Eſprit de vin ſoit le même dans les differens Thermometres: mais ce ſeroit une ſuppoſition bien fauſſe dans la pratique. Deux Eſprits de vin diffèrent extrêmement en qualité, en dilatabilité; cependant les Thermometres ordinaires n'ont aucun égard à cette difference, & c'eſt-là le dernier que nous ayons à traiter de leurs principaux inconvéniens.

L'Eſprit de vin eſt un mêlange d'une Huile éthérée, ſubtile, inflammable; & d'une

eau

eau ou flegme: l'Eau de vie n'eſt auſſi que ce mêlange, & elle devient Eſprit de vin quand on y diminue la doſe de l'eau par rapport à celle de l'Huile, ce qu'on appelle *rectification*. L'Eſprit de vin eſt plus ou moins rectifié, & par conſéquent different, ſelon que la doſe de l'Huile eſt plus ou moins forte; il en eſt plus ou moins dilatable par la chaleur.

Pour meſurer la dilatabilité d'un Eſprit de vin quelconque, M. de Reaumur en prend dans un Matras à long col 400 parties telles qu'elles ſont quand la congélation artificielle les a condenſées, & enſuite il voit juſqu'où les éleve la chaleur de l'eau bouillante, ce qui donnera les deux points fixes. L'opération ne promet pas d'abord un bon ſuccès, car longtems avant que l'eau bouille, l'Eſprit de vin bout, & s'éleve beaucoup & irrégulierement, deſorte qu'il ſemble qu'on ne peut ni marquer alors le terme précis de ſon élévation, ni attendre le tems où l'eau bouillira. Mais il y a un expédient facile & heureux. On n'a qu'à retirer de l'eau chaude l'Eſprit de vin qui en eſt entouré, auſſi-tôt ſes bouillonnemens ceſſent, ſa ſurface s'applanit, & ſe met tranquillement à un certain point plus élevé que celui où elle étoit: cela vient de la chaleur acquiſe, qui ſe conſerve quelque tems. On remet enſuite le Matras dans l'eau qu'on rend plus chaude, l'Eſprit de vin s'éleve encore, bouillonne, mais on le retire encore, & ſa ſurface applanie ſe remet à un nouveau point plus élevé. On recommence ce manege juſqu'à ce que l'eau étant bouillante, la ſurface applanie de l'Eſprit de vin,

qu'on

qu'on aura retiré de cette eau, & qu'on y aura remis, se tienne constamment au même point d'élévation dans ces changemens alternatifs, car cela arrivera quand l'Esprit de vin aura pris toute la chaleur qu'il peut prendre par l'eau bouillante sans être échauffé jusqu'au point de bouillir.

L'Esprit de vin le mieux rectifié que M. de Reaumur ait pu trouver à Paris chez les Marchands ordinaires, est tel que s'il est 400 par la congélation artificielle de l'eau, il devient 435 par l'eau bouillante, ce qui est le rapport de 80 à 87. On voit par-là l'intervalle où seront renfermés les degrés moyens pour des Esprits de vin moins rectifiés. Il seroit à propos, & même nécessaire d'écrire sur chaque Thermometre la qualité de l'Esprit de vin exprimée par la dilatation qu'il peut prendre depuis le point où il est 400 par la congélation jusqu'à celui où il sera 435, par ex. ou 434, &c. par l'eau bouillante. Deux Thermometres seront aisés à comparer malgré la differente dilatabilité de leurs Esprits de vin, puisque des degrés inégaux d'élévation de la liqueur, mais correspondans, ne seront que les effets du même degré de chaleur.

Il n'est nullement nécessaire de pousser la longueur des Thermometres jusqu'où la chaleur de l'eau bouillante le demanderoit, puisque celle de l'air n'ira jamais si loin à beaucoup près; cela n'est indispensable que pour l'épreuve de la qualité de l'Esprit de vin: hors de-là de moindres tuyaux suffisent, & il est plus aisé de s'en fournir. Par la même raison de facilité & de commodité, M. de Reaumur

 n'est

n'eſt pas d'avis qu'on ſe pique d'employer le meilleur Eſprit de vin, il ne s'en trouveroit pas par-tout; le plus médiocre, & même l'Eau de vie ſuffira, bien entendu toujours que la qualité en ſera connue. Les tuyaux ſeront plus courts pour une liqueur moins dilatable, & les Thermometres pourront aſſez aiſément, ſi l'on veut, être égaux.

On peut ramener deux differens Eſprits de vin à être de la même dilatabilité. Cette liqueur eſt un composé d'eau & d'huile éthérée, & toute ſa dilatabilité n'appartient pas à l'huile ſeule, l'eau en a auſſi ſa part, quoique moindre. M. de Reaumur ayant fait prendre à 400 parties d'eau de la Seine tout le froid que pouvoit lui donner d'autre eau qui l'entouroit, & commençoit à ſe glacer, trouva que par la chaleur de cette même eau bouillante le volume de l'eau de Seine devenoit 415. Ayant pris enſuite de l'Eſprit de vin dont le volume condenſé par la congélation artificielle de l'eau étoit 400, & devenoit 435 par l'eau bouillante, il a mêlé 300 parties de cet Eſprit de vin avec 100 d'eau de Seine, & il a eu un Eſprit de vin, dont la dilatation extrême, au-lieu d'être 435, n'étoit plus que 430; & c'eſt préciſément ce qu'on trouvera par le calcul que devoient donner les 100 parties d'eau mêlées aux 300 d'Eſprit de vin, ſelon la proportion de leurs dilatations extrêmes connues par expérience. 200 parties d'eau de Seine mêlées avec 200 parties du même Eſprit de vin font un Eſprit de vin dont la dilatation extrême n'eſt plus que 425. La dilatation extrême de l'Eſprit

de

de vin affoibli se trouve toujours, ou à peu près, celle qui devoit venir selon le calcul.

L'Inverse de cette Méthode seroit de fortifier, pour ainsi dire, un Esprit de vin foible par un autre plus fort, après avoir connu par les épreuves rapportées la dilatabilité de l'un & de l'autre. M. de Reaumr donne la règle mathématique pour avoir par cet alliage des Esprits de vin de tel titre qu'on voudra, car on peut transporter à ce sujet les expressions qui appartiennent aux métaux, puisqu'il est tout pareil. On pourroit donc avoir par-tout de l'Esprit de vin de la même qualité, & des Thermometres parfaitement semblables, ce qui seroit bien le mieux, du moins pour les Savans; mais les Savans eux-mêmes auront peut-être de la peine à entrer dans une convention générale, tant il est difficile que des hommes conviennent.

M. de Reaumur étend jusqu'à une curiosité de Physique assez interessante, la méthode qu'il a trouvée pour mesurer la dilatabilité de differens Esprits de vin. Un Esprit de vin quelconque est un composé de deux substances differentes, l'eau & l'huile éthérée, toutes deux dilatables, mais differemment; & il s'agit de découvrir autant qu'on le peut, quelle est cette difference. Nous avons vu que si d'un très bon Esprit de vin, qui de 400 deviendroit 435, on en ôtoit 200 parties qu'on remplaçât en eau de Seine, il n'iroit plus que de 400 à 425. Supposons que les 200 parties restantes d'Esprit de vin ne soient que de l'huile éthérée pure; sur la dilatation 25, il en appartient 7 $\frac{1}{2}$ parties à

l'eau, puisque cette eau a 200 parties, & que la dilatation de 400 de ces parties iroit à 415; donc 25 moins 7 $\frac{1}{2}$, ou 17 $\frac{1}{2}$ sont ce qui appartient à la dilatation de l'huile, & les dilatations de l'huile & de l'eau sont comme 17 $\frac{1}{2}$ à 7 $\frac{1}{2}$, ou 7 à 3. Mais il s'en faut bien que dans le mêlange d'Esprit de vin & d'eau les 200 parties restantes d'Esprit de vin ne fussent que de l'huile; M. Geoffroi le cadet a fait voir que dans l'Esprit de vin le mieux rectifié, il y a plus de la moitié de flegme ou d'eau, & cette eau peut légitimement passer pour être toute pareille à notre eau commune. Dans le mêlange supposé de 200 parties d'eau, & de 200 d'Esprit de vin, il y avoit donc au plus 100 parties d'huile éthérée, & au moins 300 d'eau: n'en prenons que 300. On verra aisément qu'il leur appartient 11 $\frac{1}{4}$ parties de la dilatation totale 25, dont le reste qui est 13 $\frac{3}{4}$ appartient aux 100 parties d'huile. Mais il faut bien remarquer qu'au-lieu que dans la premiere supposition les parties d'eau & d'huile étoient en nombre égal, dans celle-ci leurs nombres sont comme 3 & 1. C'est le volume 3 d'eau qui a pris l'augmentation 11 $\frac{1}{4}$, & c'est le volume 1 d'huile qui a pris l'augmentation 13 $\frac{3}{4}$. Or les dilatations sont d'autant plus grandes, non-seulement en même raison que les augmentations de volume sont plus grandes, mais encore en même raison que les volumes primitifs étoient plus petits. Donc la dilatation de l'huile est à celle de l'eau comme le produit de 13 $\frac{3}{4}$ par 3 au produit de 11 $\frac{1}{4}$ par 1, ce qui donne le rapport de 33 à 9, beaucoup

plus

plus grand que le premier de 7 à 3.

C'eſt-là ce qui ſe trouve, en ſuppoſant que dans les 200 parties d'Eſprit de vin, il y en avoit 100 d'huile éthérée; mais s'il n'y en avoit que 50, ce qui eſt très vraiſemblable, auquel cas l'huile ne feroit que la 8me partie du mêlange total, on trouveroit en faiſant le même calcul, que la dilatation de l'huile feroit à celle de l'eau dans un rapport beaucoup plus grand que celui de 33 à 9. M. de Reaumur ne croit nullement impoſſible que cela n'aille encore plus loin.

Quoi qu'il en ſoit, il a fait une obſervation, qui ne doit pas être obmiſe. C'eſt que les degrés moyens de dilatation de l'huile & de l'eau ou flegme d'un même Eſprit de vin, ne ſont pas proportionnels aux dilatations extrêmes. L'eau ſe dilate d'abord plus difficilement que l'huile, & enſuite plus facilement, de ſorte que par la continuation du mouvement de dilatation elle repare une partie du deſavantage qu'elle avoit eu dans le commencement. C'eſt ce qui a été reconnu en comparant les dilatations moyennes d'une eau pure à celles d'un Eſprit de Vin d'une dilatabilité connue. Si les dilatations de l'eau & de l'Eſprit de vin par la chaleur de l'eau bouillante devoient être comme 1 & 2, chaque premier degré de dilatation des deux liqueurs depuis la congélation artificielle, étoient comme 1 & 10. De-là il ſuit que de deux differens Eſprits de Vin, le plus foible, qui par conſéquent aura plus d'eau, s'élevera moins que l'autre dans le commencement de leur marche par un même degré de chaleur,

& que par-là les deux differens Thermometres seront difficiles à comparer, ou même que la comparaison jettera dans l'erreur. Il est vrai que pour les premiers degrés, on pourra compter que la dilatation de l'eau ou flegme sera nulle; mais on ne sait pas précisément à quel nombre de ces premiers, cette supposition peut s'étendre sans une erreur trop sensible. Il est vrai aussi que les dilatabilités extrêmes des deux Esprits de Vin étant connues, on pourra faire des réductions, en concevant que le plus foible des deux n'est que le plus fort affoibli par une certaine quantité d'eau pure: mais ce seront des réductions, & du calcul, & il vaut beaucoup mieux que tous les Thermometres soient faits, s'il est possible, avec le même Esprit de Vin, ce qui sera fort aisé, puisqu'on peut l'amener à telle qualité que l'on veut.

On a vu par les Thermometres, & l'on a dû en être d'abord fort étonné, que le froid faisoit monter la liqueur, & que le chaud la faisoit descendre; mais on a bien-tôt observé que ce n'étoit que dans les commencemens de l'action de l'un & de l'autre, & l'on a conçu que la boule qui se resserroit par le froid avant qu'il se fût fait assez sentir à la liqueur, la faisoit monter dans le tuyau, & qu'au contraire cette même boule échauffée avant que la liqueur le fût, & par conséquent dilatée, la faisoit descendre en devenant d'une plus grande capacité. M. de Reaumur a poussé l'exactitude jusqu'à vouloir déterminer dans quelles bornes cet effet, qui ne pouvoit être considerable, étoit renfermé, & il

a trouvé quc la diminution de la capacité de la boule par le froid, ou ſon augmentation par le chaud, n'alloit qu'à faire monter ou deſcendre la liqueur dans le tuyau de $\frac{1}{1200}$ partie de ſon volume total, & par conſéquent de $\frac{1}{3}$ de partie ſur 400, ce qui peut bien être négligé par les plus ſcrupuleux.

Il ne reſte plus qu'une circonſtance à examiner. On laiſſe au haut du tuyau, dont le bout eſt ſcêllé hermétiquement, un eſpace que la liqueur dans ſa plus grande élevation n'achevera point de remplir. Faut-il que cet eſpace ſoit ce qu'on appelle vuide, c'eſt-à-dire, plein d'un Air très raréfié; ou faut-il y laiſſer de l'Air ordinaire? Il y a avantage & inconvénient de part & d'autre. Si l'Air eſt très raréfié, ce qu'on aura aiſément exécuté en échauffant beaucoup le bout du tuyau, après quoi on le ſcêllera bruſquement, le jeu de la liqueur ſera fort libre dans le tuyau, elle montera dans ce vuide, ſans y trouver de réſiſtance; mais auſſi, l'Air contenu dans l'Eſprit de vin s'en dégagera aiſément, parce qu'il ne ſera point preſſé, il enlevera avec lui les parties les plus ſubtiles de l'Eſprit, & cela en changera la qualité, qu'on ſuppoſe pourtant devoir être toujours la même. Si l'Air du haut du tuyau eſt de l'Air ordinaire, la qualité de l'Eſprit de vin ne changera pas; mais cet Air ſe raréfiera par la chaleur auſſi-bien que l'Eſprit de vin, & repouſſera en en-bas cet Eſprit qui tendoit à ſe dilater. Dans l'embarras de ce pour & de ce contre qui ne peuvent être évalués préciſément, M. de Reaumur prend le parti que la prudence con-

feille en pareil cas; un parti moyen: il faudra de l'Air médiocrement échauffé.

SUR LA NATURE DE LA TERRE EN GENERAL, ET SUR SES CARACTERES *.

NATURELLEMENT, on ne s'avisera point de douter, si l'on sait bien ce que c'est que de la Terre, si l'on distinguera bien cette matiere si commune d'avec toute autre, & particulierement d'avec le Sable. Mais dès que l'on vient à considerer la formation des Pierres, par exemple, qui sont quelquefois un mêlange visible de Terre & de Sable, ou, ce qui est encore plus important, si l'on travaille en Poterie, en Verrerie, en Porcelaine, tous Arts qui demandent une connoissance très exacte des matieres terreuses qu'on y employe, alors on s'apperçoit, ou qu'on ne sait pas assez, ou qu'il faut savoir mieux qu'on ne le sait d'ordinaire, quelle est la nature de la Terre, quels sont ses caracteres spécifiques, & si elle differe ou ne differe pas du Sable, qui entre dans les mêmes compositions; car suivant cela, on aura differentes vues, & les raisonnemens ou les operations se règleront differemment.

Il ne s'agit point ici de remonter jusqu'aux pre-

* V. les M. p. 349.

premiers principes, jusqu'aux particules primordiales, dont la Terre peut être formée. Sans compter que l'entreprise seroit apparemment impossible, elle seroit inutile pour le dessein présent; il ne faut que des caracteres sensibles & palpables, une Physique plus grossiere suffira: mais malgré sa grossiereté, elle demandera encore assez de subtilité & de finesse.

Quand on n'y regarde pas de près, on peut croire, & plusieurs Physiciens même sont dans ce sentiment, ou à très peu près, que la Terre n'est que du Sable dont les grains sont plus fins. Mais M. de Reaumur établit des differences spécifiques entre ces deux matieres, & il n'est plus permis ni dans la Théorie, ni dans la Pratique, de ne compter que sur cette prétendue difference de la grosseur de leurs parties.

Par des expériences de M. de Reaumur très simples & très aisées à vérifier, la Terre s'imbibe d'eau de maniere à en être augmentée de volume, & réciproquement elle revient à son premier volume lorsqu'elle se desseche. Le Sable imbibé d'eau autant qu'il peut l'être n'augmente point son volume, & n'en perd rien en se dessechant. De-là il suit évidemment, que l'eau ne fait que remplir les interstices que les grains du Sable laissent entre eux; mais qu'outre cette fonction qu'elle a aussi par rapport aux interstices des grains de la Terre, elle pénétre dans l'intérieur de ces grains, les gonfle, & les étend. Si elle ne faisoit qu'y pénétrer, & y remplir de petites cavités, elle ne feroit rien de plus que

ce qu'elle faisoit dans les interstices, le volume total de la Terre n'en augmenteroit pas; il est nécessaire pour cette augmentation que les grains soient gonflés & étendus. La simple pénétration, soit dans les interstices, soit dans les cavités des grains de la Terre, n'a besoin que de la pesanteur, de la mobilité, & de la finesse des particules d'eau; mais la *distension* des grains a un besoin indispensable d'une autre force qui fasse entrer violemment dans les grains plus d'eau qu'ils n'en recevroient naturellement, & qui surmonte la résistance qu'ils apportent à cette distension. Quelle est cette force? il seroit bien difficile de le dire. C'est sans doute celle qui fait que des Cordes imbibées d'eau, venant à se raccourcir parce qu'elles se gonflent, élevent des poids énormes; c'est celle qui fait que des Coins de bois bien sec entrés de force dans une Roche, la fendent & en détachent de grosses Meules de Moulin, lorsqu'ils se gonflent par l'eau dont ils sont abbreuvés. Ces effets de l'eau, beaucoup plus étonnans que celui dont il s'agit ici, nous apprennent seulement, qu'appliquée d'une certaine maniere elle a une force prodigieuse: l'existence de la force est prouvée de reste, mais sa nature demeure toujours inconnue.

Le Sable, quelque broyé qu'il puisse être, n'en est pas plus ouvert à l'eau, il ne la laisse entrer que dans les interstices de ses grains, & jamais dans leur intérieur, si ce n'est peut-être dans leurs petites cavités; mais alors même l'eau ne les étend pas, puisque le volume total du Sable ne reçoit ni augmentation

par

par l'introduction de l'eau, ni diminution par sa sortie, ou par le dessechement. La Terre est donc une espece de corps spongieux, dont les particules sont flexibles & capables d'extension; celles du Sable au contraire en sont incapables par leur roideur.

Si l'on veut distribuer les Corps en certaines Classes selon leur pénétrabilité par l'eau, on aura trois Classes; la 1re de corps absolument impénétrables à l'eau, tels que le Verre, l'Argent, l'Or; la 2de de corps peu pénétrables, tels que les Cailloux & les Crystaux, qui ne le sont que quand ils n'ont pas encore été assez longtems exposés à l'air, & endurcis par son action; la 3me de corps absolument pénétrables, tels que les bois, les peaux seches des Animaux, &c. le Sable se rangera dans la 1re Classe, & la Terre dans la 3me; & par-là on voit presque à l'œil que ce sont deux matieres fort differentes.

Elles le sont encore par un autre endroit, qui n'est pas moins marqué, ni moins décisif. La Terre abbeuvée d'eau est ductile, elle prend telle forme que l'on veut, & on le voit tous les jours par l'Art de la Poterie; cette qualité répond à la malléabilité des Métaux, & apparemment n'est au fond que la même. Elle ne se trouve point dans le Sable, ses parties sont trop roides, & trop inflexibles; & sans doute cela tient à ce qu'on a déja vu, qu'il n'est pas spongieux comme la Terre.

Plus la Terre est grasse, plus elle est ductile; mais elle est plus ou moins grasse, ou par elle-même, par le plus ou le moins qu'el-

le contient d'une certaine onctuosité, ou par la differente quantité de Sable avec lequel elle est mêlée. Le Sable la rend toujours plus maigre.

On pourroit penser que la ductilité qui se trouve dans la Terre, & non dans le Sable, vient de ce que les grains de la Terre sont plus fins, ainsi qu'ils le paroissent ordinairement, car cette finesse contribue certainement à la ductilité, qui consiste en ce que les petites parties glissent aisément les unes sur les autres sans perdre leur liaison, ou en prenant des liaisons nouvelles; mais M. de Reaumur a fait des expériences qui détruisent entierement cette idée.

Qu'avec de la Terre mêlée de Sable, comme elle l'est toujours, & une quantité suffisante d'eau, on fasse une eau bourbeuse, qu'on laissera reposer dans un Vaisseau; le Sable le plus grossier se précipitera au fond en un certain tems, & laissera la Terre le surnager, parce qu'il est spécifiquement plus pesant qu'elle. Sur ce principe de la difference de pesanteur, il est visible que par cette operation réiterée, par differentes lotions successives, on aura enfin le Sable & la Terre aussi séparés, aussi purs chacun qu'il soit possible. Ce Sable bien pur, on le broye extrêmement fin, on réduit de même en poudre la Terre pure, & l'on voit que ces deux poudres mêlées ensemble & mises dans l'eau s'y soutiennent également. Il faut donc que les particules de l'une & de l'autre soient d'une petitesse à trouver de la part de l'eau une égale résistance à leur descente, c'est-à-dire, qu'el-

qu'elles soient d'une égale finesse. Il faut même à la rigueur que celle des particules de Sable soit la plus grande, car elles sont spécifiquement plus pesantes que celles de Terre, & elles descendroient plutôt qu'elles, ou sans elles, si elles n'avoient une plus grande surface en même raison qu'elles ont plus de pesanteur; or pour avoir une plus grande surface en raison de la pesanteur, elle doivent être plus petites, comme le savent les Géometres. Cependant une pâte faite de cette même poudre de Sable ne sera point ductile, & celle de la poudre de Terre le sera. La ductilité de la Terre lui vient donc d'une qualité plus intrinseque que la finesse de ses grains, qui n'appartiendroit qu'à des parties intégrantes; & par conséquent elle est propre à être un caractere spécifique qui distingue la Terre d'avec le Sable.

La ductilité de la Terre tient à ce qu'elle est spongieuse. Ses grains non-seulement pénétrés & amollis par l'eau, mais gonflés & étendus, vont à la rencontre les uns des autres à cause de cette nouvelle extension, prennent aisément à cause de leur mollesse les figures nécessaires pour s'ajuster exactement ensemble, & sont en état par la même cause de perdre aisément ces figures pour en prendre d'autres. Quand la Terre, dont on avoit fait une pâte en l'abbreuvant d'eau, est dessechée, elle en est plus dure, & mieux liée, parce que les nouveaux engrenemens de particules que l'eau y avoit produits subsistent même après l'évaporation. Il est clair que ce seroit le contraire de tout cela pour du Sable

qu'on auroit traité comme la Terre.

La pénétrabilité de la Terre par l'eau, est ce qui rend la Terre la plus parfaite impénétrable à l'eau jusqu'à un certain point. Cette Terre la plus parfaite est la Glaise, qui est moins mêlée de Sable, plus pure qu'aucune autre, & tout le monde sait que l'eau ne passe point au travers, si ce n'est à une très petite épaisseur. C'est que l'eau qui en a pénétré une premiere couche, & l'a pénétrée d'autant mieux qu'elle n'y a trouvé qu'une pure Terre, en a tellement gonflé tous les grains, & si également, qu'ils ne lui permettent plus de passer jusqu'à une seconde couche. Quelques-uns ont cru que l'eau entraînoit de la premiere couche dans la seconde des grains, qui lui fermoient ensuite le passage; mais M. de Reaumur oppose à ce sentiment, entre autres raisons, que la simple vapeur d'une eau chaude, qui ne peut être soupçonnée de déplacer des grains, fait le même effet sur la Glaise.

On pourroit imaginer sans choquer la vraisemblance, que la ductilité de la Terre viendroit de la figure de ses particules, qui seroient des lames bien polies, posées les unes sur les autres, unies par un attouchement immédiat, mais faciles à séparer faute d'engrenement. Cette disposition si favorable ne peut pourtant suffire ici, elle seroit bientôt troublée quand on viendroit à pêtrir la pâte de Terre, & à changer sa forme, & les lames prendroient elles-mêmes les arrangemens les moins réguliers & les plus bizarres. De plus, les Talcs & les Gypses sont certainement

for-

formés par lames, & on trouve qu'ils le sont tant que leur division peut aller, ce qui donne un juste sujet de croire que cette disposition s'étend jusqu'à leurs petites particules. Cependant qu'on les réduise en poudre fort fine, & qu'on en fasse des pâtes bien humectées d'eau, ces pâtes n'auront point de ductilité : c'est donc une qualité attachée, non à la figure précisément, ou à la finesse, ou à l'arrangement, mais à la souplesse des parties.

Les Sels concrets, tels que l'Alun, le Vitriol, le Borax, la Soude, &c. quoique réduits en une poudre si fine qu'elle se soutient dans l'eau, tandis que celle de la Terre ne s'y soutient pas, ne font jamais, non plus que le Sable, ou les Gypses, une pâte ductile.

M. de Reaumur fait déja appercevoir quelques usages de sa Théorie. Elle entrera dans le Systême de la formation des Pierres qu'il a ébauché en 1721, ainsi que nous l'avons dit *. Les caracteres de la Terre, qui viennent d'être établis, font reconnoitre que comme il y a certaines Pierres, telles que le Grès, qui ne sont que du Sable pur, lié par la matiere crystalline ou pierreuse que M. de Reaumur a supposée, il y en a d'autres où cette même matiere a lié de la Terre pure, car elle se manifeste, & se rend presque visible par les expériences faciles que l'on fait sur sa ductilité, & sur son renflement quand elle est bien humectée, ou son raccourcissement quand elle se desseche. Les Cailloux sont

* p. 15. & suiv.

font, selon M. de Reaumur, des Pierres pétrifiées une seconde fois; ces Pierres, qui auront eu de la Terre, n'en ont plus étant Cailloux, du moins la Terre y a perdu les caracteres qui la rendoient reconnoissable. Cette espece de métamorphose est digne d'attention. Apparemment la matiere, en s'insinuant simplement entre les grains d'une Terre, l'avoit rendue Pierre, & ensuite elle la rend Caillou en pénétrant jusque dans l'intérieur des grains.

L'Art de la Poterie confirme la Théorie présente. On sait combien les Vases faits d'une pâte de Terre sont sujets à se fendre & à se gercer, & combien il faut avoir d'attention à les faire sécher peu à peu & par degrés, pour prévenir cet accident. On le prévient aussi en mêlant avec la Terre une certaine quantité de Sable, qui n'empêche pas la ductilité nécessaire. Il saute aux yeux, que la raison de cette pratique est que le Sable ne se renfle ni ne se raccourcit comme la Terre. Ce qui rend raison des pratiques aveugles des Arts, ce qui les éclaire, doit aussi en corriger de vicieuses, ou en faire naître de plus parfaites.

Nous avons rapporté en 1726 *, 1727 † & 1728 ‡, toutes les nouvelles vues de M. Couplet sur les Revêtemens, ou les Murs, qui ont des Terres à soutenir. Quoique la Géometrie ait dominé dans ces recherches, la Physique y est entrée autant, à ce qu'il semble, qu'elle le pouvoit, surtout par la secon-
de

* p. 78. & suiv. † p. 183. & suiv. ‡ p. 143. & suiv.

de hypothese de M. Couplet ; mais la Théorie de M. de Reaumur offre une consideration nouvelle très importante, & qui a échappé à tous ceux par qui ce sujet a été traité.

Des Terres coupées à plomb s'éboulent si peu, qu'à peine s'en détache-t-il quelques hottées en tout un an ; & même cette petite quantité seroit encore plus petite, si les premieres parcelles avoient été soutenues, & ne fussent pas tombées ; car ce n'est ordinairement que leur chute, qui a entraîné celle des secondes. Un Mur n'a donc pas beaucoup de peine à soutenir ces Terres, si on n'y considere que l'effort qu'elles font pour s'ébouler : mais elles en ont un beaucoup plus grand, & très violent, c'est celui qu'elles font pour s'étendre, lorsqu'elles sont bien imbibées d'eau, & c'est à quoi le Mur de Revêtement doit s'opposer.

Il est vrai que cette tendance des Terres à s'étendre, doit agir en tout sens, verticalement aussi-bien qu'horizontalement, & que le Mur ne s'oppose qu'à l'action horizontale ; mais il faut observer que la tendance verticale n'ayant pas la liberté d'agir, du moins dans toutes les couches inférieures de Terre pressées par le poids des supérieures, toute la tendance verticale se tourne en horizontale, tant que la difficulté de soulever les couches supérieures est plus grande que celle de forcer le Mur ; & cela peut aller, & va effectivement fort loin. M. de Reaumur a fait une Expérience, d'où il résulte qu'une Terre qui a très peu de hauteur, ne laisse pas de s'étendre beaucoup davantage dans le

fens horizontal, & que la force qu'elle a pour s'étendre en ce fens-là est beaucoup plus grande que tout fon poids, & par conféquent que la force dont elle auroit befoin pour s'étendre autant dans le fens vertical.

Plus les Terres auront de facilité à s'imbiber d'eau, plus elles auront de pouffée contre un Mur de Revêtement: des Sables n'en auroient aucune à cet égard; & par cette raifon, M. de Reaumur propofe pour remede à l'inconvénient dont il s'agit, de mêler exprès des Gravois dans les Terres qui ne feroient pas naturellement affez fablonneufes. Non-feulement les Gravois ou les Sables ne s'imbiberont pas d'eau, mais ils laifferont des interftices qui feront des efpeces de retraites ménagées à la Terre qui fe renflera, moyennant quoi elle n'agira pas contre le Mur.

Pour un examen parfait de la nature de la Terre, les deux caracteres que nous avons expofés jufqu'ici, ne fuffiroient pas, quoiqu'ils puiffent paffer pour les principaux. M. de Reaumur en trouve plufieurs autres qui diftingueront les Terres entre elles, & dont il ne donne encore qu'une efpece de dénombrement, fe réfervant à les confiderer plus en détail.

Les Terres different par les couleurs, foit celles qu'elles ont naturellement, foit celles qu'elles prennent au feu.

Les unes fe vitrifient, les autres fe calcinent, & cela en differens degrés.

Elles paffent toutes pour être Alkalines, & les Acides agiffent fur elles; mais fort differemment. Il y a des Terres qui reçoivent des plus foibles Acides une violente impref-

fion,

ſion, tandis que d'autres en reçoivent à peine une ſenſible des Acides les plus forts. Elles ſont encore à cet égard fort differentes des Métaux, par le peu de tems qu'elles demeurent ſuſpendues dans leurs Diſſolvans. Cette matiere, peu examinée juſqu'à préſent, promet de la nouveauté.

Encore une qualité des Terres, à laquelle on n'a pas fait d'attention, c'eſt leur odeur. Celle des Pluyes d'Eté eſt fort connue, elle vient de la Terre qui n'a preſque d'odeur que quand elle eſt humectée; tout au contraire de quelques autres matieres, comme les Cheveux, la Corne, &c. qui n'en ont que par le feu.

On ſent aſſez ce qu'on peut attendre des recherches qui ſe feront ſur toutes ces qualités des Terres, ſi expoſées à tout le monde pour la plupart, & ſi peu obſervées. Leurs combinaiſons feront naître une diſtribution générale des Terres en Claſſes, Genres & Eſpeces, pareille à celle qui a paru ſi néceſſaire en Botanique, & dont s'occupe depuis ſi longtems. Ces ſortes d'Ordres, ou d'Ordonnances, ſi l'on veut, ne ſont, à la vérité, que des productions de l'Eſprit humain; mais ils nous aident à embraſſer mieux tout ce que la Nature ne nous a donné que pêle-mêle & en confuſion; quelquefois même ils donnent lieu de découvrir des cauſes générales, & de prévoir avec vraiſemblance des faits particuliers.

Nous

NOus renvoyons entierement aux Mémoires

* La Comparaison des Observations faites à Paris & à Aix.

† L'Ecrit de M. de Reaumur sur la Méchanique avec laquelle certains Insectes roulent des feuilles.

‡ Et les Observations Météorologiques de cette année 1730. par M. Maraldi.

ANATOMIE.

SUR LE CRYSTALLIN ‡.

M. PETIT le Médecin, qui, comme on l'a vu dans plusieurs des Volumes précédens, s'est attaché particulierement à l'Oeil, est entré dans des détails beaucoup plus grands qu'il n'avoit encore fait sur le Crystallin, une des principales parties d'où dépend la perfection de la Vision, & qui de plus est le siege de la Cataracte.

Il ne s'est pas borné aux Crystallins humains de tous âges, il a étendu ses recherches jusqu'à ceux de tous les Quadrupedes, Oiseaux, Poissons, qu'il a pu recouvrer. Il en

* V. les M. p. 1. † V. les M. p. 79.
‡ V. les M. p. 118. ‡ V. les M. p. 4. & 622.

en a consideré la differente consistence, la couleur, la figure, les dimensions, la pesanteur. Voici ce qui résulte de ses observations.

Dans les Serpens & les Poissons, le Crystallin est presque sphérique.

Dans tous les autres Animaux, j'entends ceux que M. Petit a vus, il est Lenticulaire, comme on sait, ou formé de deux Segmens de Sphere posés l'un contre l'autre, & qui ont une circonference circulaire commune. Les deux Spheres, dont ces Segmens sont portions, ne sont que très rarement égales. La Sphere à laquelle appartient le Segment qui fait la surface antérieure du Crystallin, est presque toujours la plus grande des deux; & par conséquent la surface antérieure du Crystallin est moins convexe, ou moins courbe que la postérieure, & fait de moindres réfractions. M. Petit a eu la patience de mesurer dans un grand nombre de Sujets de differentes especes ces deux convexités, le diametre de la circonference commune, ou la largeur du Crystallin, la longueur de la ligne menée du sommet d'un Segmet au sommet de l'autre, ce qui est l'épaisseur ou l'axe du Crystallin. Ces petites mesures sont les plus difficiles à prendre, & les plus ennuyeuses par leur petitesse même. Pour ces dimensions, & pour les pesanteurs des Crystallins, M. Petit a fait une Table de 26 Crystallins humains de differens âges, & une autre Table de 30 Crystallins de Bœufs, dont il est aisé d'avoir une assez grande quantité.

La pesanteur du Crystallin humain a été trouvée de 1 grain $\frac{1}{4}$ dans un Fœtus de 7 mois,

Le Cryſtallin de l'Homme peut perdre juſqu'aux ¼ de ſon poids. Pluſieurs Cryſtallins de jeunes Animaux en perdent autant.

La ſtructure du Cryſtallin par couches, ou envelopes concentriques poſées les unes ſur les autres, ſe confirme telle qu'on la conçoit ordinairement. M. Petit s'en eſt aſſuré tant par des coupes adroites du Scalpel, que par des expériences de Cryſtallins mis dans pluſieurs liqueurs differentes, & principalement dans des Eſprits acides, où ils ſe ſont fendus, tantôt en Côtes de Melon, tantôt du centre à la circonference, ou de la circonference au centre, mais toujours d'une maniere à donner lieu de juger de la conſtruction totale.

M. Petit s'eſt fort étendu ſur la Capſule du Cryſtallin, à laquelle il a donné un Mémoire entier. C'eſt une Membrane qui envelope tout le Cryſtallin, mais une Membrane ſi déliée que d'habiles Anatomiſtes en ont nié l'exiſtence, ou du moins en ont douté. Elle n'eſt effectivement guere moins fine dans l'Homme, qu'une toile d'Araignée. Auſſi quelques-uns l'appellent-ils *Arachnoïde*. Elle eſt une fois plus épaiſſe dans le Bœuf, que dans l'Homme, & encore plus dans le Cheval. Elle ſeroit par conſéquent moins difficile à démontrer dans ces Animaux, & ce ſeroit une aſſez forte préſomption qu'elle devroit ſe trouver dans l'Homme; mais on l'y démontre auſſi, & même ſans injection, quoique ce fût d'ailleurs une choſe aſſez ſurprenante, qu'une Membrane ſi fine pût être injectée. Elle peut l'être cependant. Elle reçoit

çoit quelquefois aussi une Injection naturelle, c'est-à-dire, qu'il s'y fait une inflammation, & que ses Vaisseaux plus remplis de Sang, ou de la liqueur qu'ils portent, deviennent visibles, & qu'on apperçoit leur distribution, & leurs ramifications.

Le Crystallin de l'Homme revêtu de sa Membrane ou Capsule paroît moins transparent à sa partie antérieure qu'à la postérieure; mais s'il est dépouillé, sa transparence est égale des deux côtés.

Le ligament ciliaire se termine & s'attache à la partie antérieure de la Capsule par des fibres qu'il y jette, & par les Vaisseaux qu'il lui fournit. Ces vaisseaux ne sont que des Lymphatiques. Quand il paroît du Sang dans cette Membrane, c'est par quelque accident particulier, comme lorsque dans un accouchement difficile la tête de l'Enfant a été violemment comprimée au passage, & que le Sang y a été obligé de s'insinuer dans des Canaux qui ne lui étoient pas destinés.

La Capsule se nourrit donc de cette Lymphe, qui lui est apportée par les Vaisseaux qu'elle reçoit du Ligament Ciliaire. On voit qu'il s'en épanche une partie dans la cavité de la Capsule, entre cette Membrane & le Crystallin.

M. Petit l'a toujours trouvée transparente, tant dans l'Homme que dans les Animaux, même dans les Sujets qui avoient des Cataractes. La Cornée & la Membrane Hyaloïde trempées dans l'eau bouillante, dans les Esprits acides, &c. y perdent leur transparence; la Membrane Crystalline y conser-

ve la fienne, elle ne la perd que dans l'Esprit de Nitre, encore s'y diffout-elle le plus fouvent, plutôt que de la perdre. Les Cryftallins deviennent opaques dans des Solutions de plufieurs fortes de Sels, & leurs Capfules ne le deviennent pas.

Il feroit fort naturel que de la Capfule, il partît des Vaiffeaux, qui entraffent dans le Cryftallin, c'eft ainfi que toutes les parties du Corps de l'Animal font liées avec leurs voifines; mais M. Petit s'eft fort affuré qu'il n'en étoit pas de même ici. Le Cryftallin eft la feule parfaitement ifolée à l'égard de toute autre, & en effet fa tranfparence le demande; elle feroit au moins troublée & diminuée, fi des Vaiffeaux venoient ferpenter dans fa fubftance, & traverfer de tous côtés ces lames ou ces couches qui le compofent, & dont le tiffu a befoin d'être fi homogene.

Comment donc fe nourrit le Cryftallin, s'il n'a point de Vaiffeaux? Il s'imbibe de cette Lymphe épanchée dans la Capfule, & s'en nourrit comme font plufieurs autres Corps qui croiffent fans *intuffufception*. Peut-être même ne fe laiffe-t-il pénétrer que par la partie la plus féreufe de cette liqueur, tandis que l'autre partie plus vifqueufe refte extérieure, & prenant peu à peu une certaine confiftence, fe moule entre la Capfule & le Cryftallin dont elle devient la premiere & la plus grande couche pour un tems, car enfuite elle fera recouverte par une autre.

Si cette Lymphe vient à manquer, le Cryftallin devient dur & opaque, & peut aifément fe réduire en poudre, ainfi que M. Petit

l'a

l'a observé. La Capsule qui sera le Réservoir des Sucs nourriciers du Crystallin aura donc un usage assez important, sans compter celui de l'arrêter & de le tenir en état dans le Chaton de l'Humeur Vitrée, où il est enchassé, comme un Diamant dans le sien.

Cette liqueur est en si petite quantité dans l'Homme, qu'elle s'est dérobée aux expériences que M. Petit en eût voulu faire. Il faudroit avoir 18 ou 20 Yeux à la fois, & tous bien pourvus de la Lymphe, car ils ne le sont pas tous; & il est bien visible que cela ne seroit pas aisé. Du moins il a fait quelques épreuves sur la Lymphe Crystalline des Bœufs, qui est en plus grande quantité, & d'ailleurs plus visqueuse, & plus propre à se décomposer; mais il n'en a encore pu tirer de conséquences bien précises.

Il en tire une assez importante de ce qu'il a découvert sur la Capsule. On croit encore qu'il peut y avoir des Cataractes membraneuses, qui seront des Membranes épaissies, & devenues opaques; on en a vu *. Mais M. Petit juge qu'on a été trompé par une fausse apparence. Ces Cataractes sont la Capsule épaissie, à la vérité, mais non pas dans sa propre substance. Le Crystallin, faute de nourriture suffisante, s'est desseché, & en se dessechant s'est collé à sa Capsule, dont il n'étoit plus séparé par la Lymphe. L'épaisseur qu'on trouve de plus à la Capsule, & qui cause son opacité, lui vient de quelques particules étrangeres, qui appartenoient au Crystal-

* V. l'Hist. de 1722. p. 21. & suiv.

tallin. Qu'on les enleve par le moyen d'un peu d'eau, la Capsule redevient transparente. Combien de choses à observer sur l'Oeil seul! combien en avons-nous déja dit, dont de grands Oculistes, & qui ont eu de grands succès, n'ont eu peut-être guere de connoissance!

DIVERSES OBSERVATIONS ANATOMIQUES.

I.

M. DU VIVIER, Chirurgien Major de l'Hôpital de Thionville, envoya à M. Morand un Rein unique, tel qu'il l'avoit trouvé à l'ouverture du Corps d'un Suisse. On ne laissoit pas de conjecturer par une échancrure de la surface, que ce Rein avoit été formé de la jonction des deux: mais comme M. du Vivier avoit trouvé le Foye du Sujet extrêmement gros, il avoit lieu de croire que des deux Reins c'étoit le droit qui ayant été fort pressé & fort incommodé, s'étoit uni à l'autre, dont l'extension naturelle n'avoit point été gênée; & en effet ce Rein unique étoit beaucoup plus gros dans toute sa partie gauche, & tous les Vaisseaux, qui eussent appartenu aux deux Reins, & qu'il avoit, quoique dans une position un peu differente de l'ordinaire, étoient aussi plus gros de ce même côté-là. M. Morand le dissequa en pleine Académie, & on le trouva effectivement unique en dedans, comme il le paroissoit en dehors.

Il

Il n'eſt point dit que le Suiſſe eût aucune incommodité qui ſe rapportât à cette conformation ſinguliere.

Elle ne l'eſt pas cependant à tel point, qu'il n'y en ait déja des exemples connus. M. Morand en cita un pris de la Centurie 11me Hiſt. 77. des *Hiſtoires Anatomiques* de Th. Bartholin. Lui-même en fit voir un pareil, & M. du Vivier en alleguoit auſſi un qu'il avoit vu autrefois. On peut aiſément juger qu'il y avoit des differences dans le nombre & dans la diſtribution des Vaiſſeaux.

II.

Un jeune Gentilhomme de Languedoc âgé de 13 à 14 ans, qui après s'être fort échauffé, s'étoit mis les pieds dans de l'eau froide, en eut une fievre ordinaire, dont la ſuite fut très fâcheuſe. C'étoit une tumeur très conſiderable, qui occupoit le milieu de la région Epigaſtrique, & preſque les deux Hypochondres, au haut de laquelle on remarquoit le Cartilage Xiphoïde relevé & pouſſé en dehors de deux pouces, & qui étoit terminée dans le bas à un pouce au-deſſus de l'Ombilic. Comme les Cataplaſmes, les Remedes émolliens, ſpiritueux, &c. avoient été inutiles, & que le Malade attaqué d'une fievre lente tomboit dans un deſſechement & dans un dépériſſement très menaçant, on réſolut à Montpellier d'ouvrir la tumeur, & ce fut M. Soullier, Ecuyer, Maitre Chirurgien & Anatomiſte Royal en l'Univerſité de Médecine de cette Ville, qui fit l'operation. Il

trouva le Foye considerablement abscedé dans sa partie antérieure & convexe: il s'y étoit fait un trou qui auroit pu recevoir la moitié d'un Oeuf de Poule, & il en sortoit dans les Pansemens de la matiere sanguinolente très épaisse, quelquefois jaunâtre, amere & inflammable, qui étoit de véritable Bile, & toujours des floccons de la propre substance du Foye, où l'on pouvoit appercevoir de petits bouts de Vaisseaux, les uns Sanguins, les autres Biliaires.

La principale difficulté étoit de bien vuider la matiere de l'Abscès, d'en empêcher le séjour dans le Foye, & le reflux dans le Sang. Pour cela M. Soullier imagina une Canule d'argent particuliere, émoussée par le bout qui entroit dans le Foye, de peur qu'elle ne le blessât, mais percée de plusieurs ouvertures laterales, qui recevoient la matiere nuisible. De-là il étoit aisé de la jetter en dehors; & on avoit eu même la précaution de faire qu'elle ne pût s'épancher que sur une plaque de plomb appliquée à la Playe, car autrement elle eût causé des excoriations à la Peau. Le tout réussit si bien, que l'on vit la fievre du Malade diminuer de jour en jour, & son embonpoint naturel revenir peu à peu. Sa playe se cicatrisa en très peu de tems.

M. Soullier a cru devoir prévenir une objection de Théorie qu'on pourroit faire. Presque tous les Anatomistes tiennent que la Bile contenue dans les Vaisseaux du Foye est toujours insipide, & à peine colorée, & qu'il n'y a que celle de la Vésicule qui soit jaune & amere. Cependant on a vu ici de la Bile

ainsi conditionnée, qui ne sortoit pas de la Vésicule. Mais il est fort naturel que les qualités qu'elle y auroit prises, elle les ait prises par son séjour dans la substance du Foye.

La Relation envoyée à l'Académie par M. Soullier, a été signée de Mrs Chicoyneau & Bourraigne, fameux Médecins de Montpellier.

III.

Un homme de 28 ans employé à Brest dans les Fermes du Roi, s'étoit plaint pendant 10 mois d'une douleur de poitrine, qui lui ôtoit la faculté de respirer, d'un vomissement qui lui prenoit par paroxismes, & d'une pesanteur dans le bas-ventre. Il mourut après avoir essuyé inutilement tous les remedes ordinaires, & il fut ouvert par M. Cadran Chirurgien des Vaisseaux du Roi à Brest, qui en a envoyé la Relation à M. du Fay. On lui trouva plus de causes de tous ses maux qu'il n'en falloit, les Poumons flétris & très secs, la Pleure très enflammée, les Intestins gangrenés, la Vessie raccornie & vuide, la Vésicule du Fiel pareillement toute vuide: mais on lui trouva aussi ce qu'on n'eût pas soupçonné, & ce qui n'avoit rapport à aucun des maux dont il se plaignoit. Il n'avoit jamais rendu de sable, jamais eu de douleurs Néphrétiques, ni de suppression d'urine; cependant son Rein droit, devenu extraordinairement gros, d'une substance cartilagineuse, & si dure qu'on eut de la peine à le couper, renfermoit une grosse Pierre du poids de 6 On-

ces $\frac{1}{2}$. Le corps de la Pierre, formé à l'ordinaire par couches, remplissoit la capacité du Bassin, & par son bout inférieur enfiloit la route de l'Uretere; mais il partoit de ce corps un grand nombre de branches d'une figure extrêmement irréguliere, dont les unes se distribuoient dans les Cellules des Vaisseaux Excrétoires, & les autres ne s'attachoient à rien; elles n'étoient toutes que des graviers entassez, & envelopés d'une lame osseuse, tirant sur la couleur d'un Corail blanc. Le Rein gauche étoit dénué de toute sa substance, n'ayant ses Cellules remplies que d'une liqueur verdâtre. Il est presque inconcevable que de semblables Reins ne se soient pas fait sentir, aussi-bien que toutes ces autres parties qui n'étoient pas plus mal affectées.

I V.

M. du Fay, Médecin du Port de l'Orient, a écrit à M. Geoffroy, que dans le cours de deux ans, il étoit sorti à un Charpentier de ce Port, âgé de 84 ans, 4 Dents, 2 Incisives, & 2 Canines.

V.

M Bouillet, dont nous avons déja parlé plusieurs fois, Sécrétaire de l'Académie de Béſiers, & Correspondant de celle de Paris, a écrit à M. de Mairan, que les Vers ronds & longs, qui sont toujours assez communs dans le païs où il est, l'ont été beaucoup davantage en 1730. Des personnes de tout âge, de tout sexe, de tout temperament, en ont été at-

attaquées & en ont rendu même quelquefois par la bouche. Quelques-uns en sont morts, malgré tous les secours de la Médecine. La femme d'un Artisan de Bésiers a été celle qui a eu la maladie la plus considerable & la plus opiniâtre. Elle a jetté dans l'espace de 25 jours 21 ou 22 Vers, dont 6 sont venus par la bouche, 5 vivans & 1 mort, & les autres par les selles, vivans la plupart, mais qui mouroient peu de tems après. Ce n'étoit qu'à force de remedes les plus puissans redoublés qu'on les arrachoit de son corps, & le plus grand nombre n'en avoit pas été tué.

Cette femme avoit à la vérité usé de quelques mauvais alimens, mais ordinaires dans le païs, & aux gens de son état; & d'autres personnes, qui n'en avoient pas usé, & qui faisoient même des excès de vin, ne laissoient pas de tomber dans cette maladie. Cela a fait penser à M. Bouillet que la principale cause de cette abondante génération de Vers avoit été la grande douceur de l'Hiver de 1730, qui avoit fait éclorre leurs Oeufs en plus grande quantité, & plus facilement, si cependant ces Vers sont Ovipares.

Car M. Bouillet lui-même rapporte que dans un Ver de cette espece, plus gros que les autres, on a vu clairement de petits Vers vivans monter & descendre. Ce fait, qui n'a été vu que de la Mere du Malade, dont le Ver étoit sorti, & qui fut dit aussi-tôt à un Maitre Apoticaire de Bésiers, ne paroitroit pas assez attesté, s'il n'y en avoit deux à peu près semblables, l'un dans une Lettre inserée dans les *Actes* de Th. Bartholin tom.

3. c. 58, l'autre dans la nouvelle Edition du Traité de la *Génération des Vers*, p. 39.

V I.

Le même M. Bouillet a vu un Foye de Coq, pesant un peu plus d'une livre. Il n'avoit rien d'extraordinaire, que sa grosseur monstrueuse. Le Coq avoit été tué par hazard d'un coup de pierre, & on ne lui avoit remarqué aucune sorte d'indisposition.

V I I.

M. Garsin, Correspondant de l'Académie, & qui a été employé par la Compagnie Hollandoise des Indes Orientales en qualité de Chirurgien, a vu dans l'Estomac parfaitement vuide d'une Bonite que l'on prit dans la Mer au-delà de l'Equateur, un Ver qui y étoit assez fortement attaché, & dont on a joint ici la figure au naturel, pour tenir lieu d'une plus ample description. Le corps de ce petit Animal est divisé en deux parties peu inégales par une bulle assez grosse & bien marquée, placée comme sous le ventre, & qui peut s'enfler & se desenfler alternativement. Quand cette bulle s'enfle elle s'attache par un orifice qu'elle a, & qui se dilate, à quelque corps tel qu'étoit l'estomac de la Bonite; & alors ne contenant qu'un air très raréfié, & pressée de toutes parts également par l'air plus dense qui l'environne, elle est, à la maniere d'une Ventouse, fortement appliquée à l'endroit qu'elle a saisi. C'est-là le point fixe sur le-

lequel se font les deux mouvemens de l'Animal. Par l'un sa bulle étant arrêtée à demeure, il promene sur ce centre en tous sens la partie antérieure de son corps qui est flexible, s'allonge & se raccourcit, & même se met en arc; & sa bouche ou trompe, qui est à l'extrémité de cette partie antérieure, va sucer successivement tout ce qui se trouve dans l'espace assez grand que ce mouvement si varié peut parcourir. C'est à cause de cette succion que M. Garsin nommé ce Ver *Hirudinella marina*, petite Sangsue de Mer. Par l'autre mouvement, qui est proprement le progressif, l'Insecte ayant arrêté sa bulle à un endroit, arrête sa bouche à un autre le plus éloigné qu'il peut, & ensuite accourcissant sa partie antérieure, & desenflant sa bulle qui lâche ce qu'elle avoit saisi, il avance vers le lieu où est sa bouche, en trainant seulement sa partie postérieure, qui ne paroît point contribuer par elle-même à la progression.

Cet Insecte, tiré de l'Estomac de la Bonite, ne vécut qu'environ deux heures. Exposé à l'air il étoit languissant, & reprenoit de la vivacité dans de l'eau de Mer. Il diminua sensiblement de volume pendant qu'il vivoit encore.

M. Domaingo Sorhaïz, Chirurgien de Mrs les Ambassadeurs d'Espagne, a fait voir differens Bandages pour les Descentes Inguinales, pour celles de Matrice, pour les Exomphales, pour les incontinences d'Urine, pour la Chute de l'Anus, pour la com-

preſſion de l'Artere Cruale dans l'amputation de la Cuiſſe; & l'Académie y a trouvé pluſieurs choſes particulieres à M. Sorhaïz, & qui marquent en lui bien du génie, ſoit pour inventer, ſoit pour perfectionner.

NOus renvoyons entierement aux Mémoires

* L'Obſervation de M. Morand ſur une altération ſinguliere du Cryſtallin, & de l'Humeur Vitrée.

† L'Ecrit de M. Vinſlou ſur les Mouvemens de la Tête, du Col, &c.

‡ Celui de M. Hunaud ſur les Os du Crane de l'Homme.

* V. les M. p. 467. † V. les M. p. 492.
‡ V. les M. p. 777.

CHIMIE.

*SUR LES BOUILLONS DE VIANDE *.*

LEs Bouillons de Viande ſont la nourriture ordinaire des Malades, & quand il faut leur meſurer les alimens fort juſte, il eſt à propos de ſavoir quelle quantité d'aliment ces Bouillons contiennent. On le fait peut-être en gros, & par une eſpece d'eſtime, & cela ſuffit pour les cas qui ne ſont pas de rigueur: mais dans ceux qui en ſont, il ſeroit bon de le ſavoir avec préciſion; & en général, ce ſera au moins une connoiſſance curieuſe.

On a fait anciennement dans l'Académie quantité d'Analyſes de differentes Viandes, mais ces Viandes étoient diſtillées crues au Bain-Marie; & en cet état, & par cette voye, il ne ſeroit pas étonnant qu'elles nous donnaſſent des principes differens ou en qualité, ou en quantité, de ceux qu'elles donnent à une eau où elles auront longtems bouilli, & jusqu'à faire, ſi l'on veut, un Conſommé. C'eſt ce qu'on ne s'étoit point encore propoſé, & ce que M. Geoffroy ajoute à ce qui s'étoit déja fait.

Son procédé general peut ſe diviſer en 4 parties, 1°. par la ſimple diſtillation au Bain-Ma-

* V. les M. p. 312.

Marie, & ſans addition, il tire d'une certaine quantité, comme de 4 Onces d'une Viande crue, tout ce qui s'en peut tirer. 2°. Il fait bouillir 4 autres Onces de la même Viande autant & dans autant d'eaux qu'il faut pour en faire un Conſommé, c'eſt-à-dire, pour n'en pouvoir plus rien tirer; après quoi il fait évaporer toutes les eaux où la Viande a bouilli, & il lui reſte un Extrait auſſi ſolide qu'il puiſſe l'être, qui contient tous les principes de la Viande, dégagés de flegme & d'humidité. 3°. Il analyſe cet Extrait, & ſépare ces principes autant qu'il eſt poſſible. 4°. Après cette Analyſe il lui reſte encore de l'Extrait une certaine quantité de fibres de la Viande très deſſechées, & il les analyſe auſſi.

La 1ere partie de l'operation eſt en quelque ſorte détachée des trois autres, parce qu'elle n'a pas pour ſujet la même portion de Viande, qui eſt le ſujet des trois dernieres. Elle eſt néceſſaire pour déterminer combien il y avoit de flegme dans la portion de Viande qu'on a priſe, ce que les autres parties de l'operation ne pourroient nullement déterminer.

Ce n'eſt pas cependant qu'on ait par-là tout le flegme, ni un flegme abſolument pur. Il y en a quelque partie que le Bain-Marie n'a pas la force d'enlever, parce qu'elle eſt trop intimement mêlée dans le Mixte; & ce qui s'enleve eſt accompagné de quelques Sels volatils, qui ſe découvrent par les épreuves Chimiques.

M. Geoffroy ayant pris 4 Onces de la meilleure chair de Bœuf, dont il avoit ôté la Graiſſe, les Os, les Cartilages, les Tendons

dons & les Membranes, il en a tiré par la diſtillation au Bain-Marie 2 onces, 6 gros, 36 grains de flegme; ce qui marque que le flegme ſeul fait une partie conſiderable du tout, même ſans compter ce qui n'a pu s'élever. Enſuite 4 onces de la même chair, cuites dans un vaiſſeau bien fermé, avec 18 chopines d'eau verſées à differentes repriſes, ont donné après l'ébullition & l'évaporation 1 gros 56 grains d'Extrait, & il eſt reſté 6 gros 36 grains de fibres ſechées.

Par l'Analyſe de l'Extrait il eſt venu un Sel volatil en cryſtaux plats, formés comme ceux du Sel volatil de l'Urine, & qui paroît armoniacal. M. Geoffroy croit que c'eſt celui qui ſe ſépare du Sang par les Urines après la nutrition, & qu'on peut le regarder comme le Sel eſſentiel de la Viande. Après le Sel volatil il eſt venu de l'Huile, & il eſt reſté une Tête-morte ou Charbon très leger, en très petite quantité.

L'Analyſe des fibres a donné à peu près les mêmes produits, dans le même ordre, & en doſes un peu differentes.

Ce que nous appellons ici l'Extrait, contient toute la ſubſtance nourriſſante de la Viande. Si 4 Onces de chair de Bœuf donnent 1 gros 56 grains de cet Extrait, une Livre de 16 Onces en donnera 7 gros 8 grains; & par conſéquent ſi on prend un Conſommé d'une Livre de Bœuf, on ſait ce qu'on prend de nourriture ſolide. Mais comme les Bouillons ſe font de differentes Viandes, & le plus ſouvent mêlées, M. Geoffroy a auſſi travaillé ſur celles qu'on employe le plus ordinairement.

Dans

Dans 4 Onces de chair de Veau, il y a 18 grains de flegme de plus que dans le Bœuf, on en tire 46 grains d'Extrait de plus, & il reste 46 grains de moins de fibres desséchées. On auroit pu prévoir avant l'operation la premiere de ces differences, & même les deux autres; car le Veau qui se nourrit & croît, a besoin d'une plus grande quantité de Sucs que le Bœuf qui n'a qu'à se nourrir. Il est à présumer que parmi les Sucs du Veau, il y en a un plus grand nombre de propres à former des Os ou des Cartilages, que parmi ceux du Bœuf; & de-là M. Geoffroy tire cette conjecture, que les Boillons de Veau conviendront peut-être mieux aux Malades qui sont encore en âge de croître, ou qui sont tombés dans une grande maigreur. Si l'on ne va pas ordinairement jusqu'à ces sortes de subtilités de pratique, ce n'est pas qu'elles ne fussent utiles, c'est qu'on ne se donne pas la peine de les rechercher.

La chair de Mouton a été traitée de la même maniere que les deux précédentes, & il en a résulté qu'elle contient plus de Sucs nourriciers, & de principes volatils. La chair de Poulet, celles de Chapon, de Perdrix, &c. ont subi aussi l'examen de M. Geoffroy, & il a fait des Tables des doses exactes des produits de toutes ses operations. Par-là on est état de ne plus faire au hazard des mélanges de differentes Viandes, & de savoir précisément ce qu'on y donne, ou ce qu'on y prend de nourriture.

Il faut observer que les doses des Extraits marquées dans les Tables, sont les doses ex-

extrêmes, c'eſt-à-dire, qu'elles ſuppoſent qu'on a tiré de la Viande tout ce qui s'en pouvoit tirer par l'ébullition: mais les Bouillons ordinaires ne vont pas juſque-là, & les Extraits qui en viendroient ſeroient moins forts. M. Geoffroy en les réduiſant à ce pied ordinaire, trouve qu'on a encore beaucoup de tort de craindre, comme on fait communément, que les Bouillons ne nourriſſent pas aſſez les Malades. La Médecine d'aujourd'hui tend aſſez à rétablir la Diete auſtere des Anciens; mais elle a bien de la peine à obtenir ſur ce point une grande ſoumiſſion pour l'Antiquité.

SUR UN GRAND NOMBRE DE PHOSPHORES NOUVEAUX. *

LEs Phoſphores ſont une des nouveautés les plus récentes, & en même tems les plus curieuſes de la Phyſique moderne. D'un côté un Cordonnier de Boulogne en Italie, croyant tirer de l'Argent d'une Pierre qu'il avoit trouvée au bas du Mont Paterno, s'aviſa de la calciner, & c'eſt-là le fameux Phoſphore qu'on appelle la Pierre de Boulogne. D'un autre côté un Chimiſte Allemand, qui eſperoit trouver la Pierre Philoſophale dans l'Urine humaine, n'y trouva qu'un ſecond Phoſphore, dont le ſecret eût péri avec lui, ſi

* V. les M. p. 742.

si M. Kunkel, Chimiste de M. l'Electeur de Saxe, ne se fût mis à le chercher, & ne l'eût retrouvé à force de travail.

Ces deux Phosphores ont une difference très considerable. La Pierre de Boulogne, exposée simplement au jour, y prend de la lumiere, mais une lumiere foible, qui ne s'apperçoit que quand la Pierre est ensuite transportée dans un lieu obscur. Elle ne peut mettre le feu à rien. Le Phosphore urineux de Kunkel s'enflâme par le seul attouchement de l'air froid ou chaud, de nuit comme de jour, & peut mettre le feu à des matieres fort combustibles. Aussi ce Phosphore s'appelle-t-il *brulant*.

Ce n'est pourtant pas que cette difference soit absolument essentielle, elle pourroit bien n'être que du plus au moins. Il y a toute apparence que dans la Pierre de Boulogne, aussi-bien que dans le Phosphore urineux, il se fait une véritable inflammation, mais une inflammation de parties si déliées, qu'il n'en résulte que de la lumiere sans aucune chaleur. Les rayons du Soleil répandus dans l'air, lors même que l'air est couvert de nuages, suffisent pour allumer les Soufres très subtils de la Pierre de Boulogne, & n'auroient pas la force d'allumer des matieres tant soit peu plus grossieres, telles que les Soufres du Phosphore urineux; mais ces mêmes Soufres ont été mis par les operations Chimiques dans une disposition si prochaine à s'enflâmer, qu'il ne faut plus, pour ainsi dire, qu'un Soufflet qui excite la flâme, & ce Soufflet, c'est l'Air, au mouvement duquel

on les expose. On peut s'en tenir là, sans aller jusqu'au petit Systême que faisoit M. Homberg *.

Malgré le fond de conformité qui est entre la Pierre de Boulogne & le Phosphore urineux, ce seront toujours deux Phosphores differens, en ce que l'un ne fera que jetter de la lumiere dans l'obscurité, & que l'autre pourra mettre le feu à quelques matieres; on en pourra faire deux especes differentes, de Phosphores lumineux, c'est-à-dire simplement lumineux, & de Phosphores brulans; & on les mettra, si l'on veut, chacun à la tête de son espece, parce qu'ils y ont été découverts les premiers. Nous ne ferons point, du moins quant à présent, une troisieme espece de Phosphores tels que ceux dont il a été parlé en 1724 †, qui ne sont point Phosphores pour avoir été simplement exposés au jour ou à l'air, mais parce qu'ils ont emporté de la calcination un feu actuel, ce qui les réduit presque à n'être que des Charbons ardens.

La 2de espece de Phosphores a été la plus traitée. L'Urine, dont étoit fait celui de Kunkel, n'a pas manqué d'avertir les Chimistes qu'ils pouvoient tourner leurs vues & leurs recherches du côté des matieres animales: ils l'ont fait avec succès, & enfin M. Homberg trouva dans la plus abjecte de toutes ces matieres le plus beau des Phosphores brulans ‡. Feu M. Lémery le cadet étendit les

* V. l'Hist. de 1712. p. 51. & suiv. † p. 83. & suiv.
‡ V. l'Hist. de 1710. p. 71. & suiv.

les découvertes de M. Homberg presque à toutes les matieres, non-seulement animales, mais végétales *.

La 1re espece de Phosphores, celle des Phosphores lumineux, qui ne prennent de la lumiere qu'au jour, a été la plus négligée, peut-être parce qu'on n'a pas cru tirer aisément d'une matiere minerale, comme la Pierre de Boulogne, des principes assez vifs & assez actifs pour la proprieté singuliere dont il s'agissoit. Le Phosphore de Balduinus, fait avec la Craye, étoit le seul que l'on connût de cette nature, car nous ne comptons point celui dont il a été parlé en 1728 †, fait à la vérité de matieres minerales, & même métalliques, mais qui est brulant, & non pas lumineux dans le sens que nous l'entendons.

Mais voici le nombre des Phosphores de la 1re espece, semblables à la Pierre de Boulogne, prodigieusement augmenté. M. du Fay, travaillant dans d'autres vues sur les Pierres fines, s'apperçut que la Topaze commune, qui s'employe en Médecine, ayant été calcinée, devenoit, quant aux effets, une vraye Pierre de Boulogne. Il suivit la route où cet heureux hazard l'avoit mis, il trouva que la Bélemnite ou Pierre de Lynx réussissoit encore mieux que la Topaze; & enfin de toutes ces sortes de Pierres, des Pierres à plâtre, ou Gypses, des Albâtres, des Pierres de taille & de Liais, de la Marne, des Bols, des Pierres à chaux, & des Marbres mêmes, il tira des Phosphores qui ayant été ex-

* V. l'Hist. de 1715. p. 24. & suiv. † p. 48.

expofés au jour pendant une Minute, luifoient dans l'obfcurité.

Ce n'a pas été la calcination feule qui a donné tous ces Phofphores, il a fallu diffoudre par des Acides celles d'entre ces differentes matieres qui étoient les plus dures, & les plus compactes; & quand certaines matieres l'ont été à certain point, comme les Cailloux, le Sable de Riviere, les Jafpes, les Agathes, le Cryftal de Roche, &c. il n'eft point venu de Phofphores. Cependant M. du Fay n'en defefpere pas encore tout-à-fait, ni même des Métaux; d'autres operations pourront réuffir. L'Hiftoire des Découvertes fournit quantité d'exemples qui encouragent.

On voit affez que ces Phofphores faits de differentes matieres, & quelquefois par des procedés differens, doivent avoir entre eux un nombre proportionné de differences, & par conféquent très grand. Leur lumiere eft plus ou moins vive, elle dure plus ou moins à chaque fois qu'on les met dans l'obfcurité, parce qu'il fe confume toujours une certaine portion de leurs Soufres; ils la perdent à la fin en un tems total plus ou moins long, fuppofé que la proprieté ait été également exercée. Quand ils l'ont perdue, on la leur rend en recommençant fur eux l'operation qui la leur avoit donnée; car, & on le voit aifément, ce ne font que les Soufres de la furface qui s'enflâment, & fe confument, & une nouvelle operation fait une autre furface. Mais cela ne va pas à l'infini, & le nombre

bre de fois qu'on peut renouveller differens Phoſphores, doit être different.

Ils ont bien des choſes communes, bien entendu que c'eſt toujours avec des varietés. Ils prennent de la lumiere au travers du Verre & de l'eau; ils n'en prennent preſque point de la Lune, & encore moins des Chandelles. Ils perdent leur vertu, expoſés trop longtems de ſuite au jour. La plupart la conſervent aſſez de tems, quoique noyés dans l'eau.

Quelques-uns plongés ſubitement dans l'eau, après avoir été allumés au jour, brillent d'un plus grand éclat, à meſure qu'ils ſe diſſolvent, & s'échauffent par la diſſolution; mais cet éclat s'évanouït preſque entierement un moment après. La pâte liquide, qui eſt reſtée dans le Vaiſſeau & dans l'eau, ne laiſſe pourtant pas de redevenir encore un peu lumineuſe par le jour, mais cette vertu lui dure à peine 24 heures.

Outre l'eau commune, M. du Fay a eſſayé l'Eſprit de vin, l'Huile, les diſſolutions Acides ou Alkalines, pour voir leſquelles de ces liqueurs ôteroient aux Phoſphores la proprieté de luire, ou la diminueroient, & de quelle maniere: mais nous ne nous engagerons point dans ce détail, que M. du Fay lui-même n'a preſque fait qu'indiquer. Nous remarquerons ſeulement un phénomene ſingulier du Phoſphore de la Bélemnite. Plongé dans l'Eau-forte, il y fait un bruit ſemblable à celui d'un Fer rouge plongé dans l'eau; tant les Soufres de ce Phoſphore, quoiqu'aſ-

ſez

ſez ſubtils pour avoir été allumés par la lumiere ſeule du jour, ſont cependant forts & vigoureux, ou empruntent de force des Acides de l'Eau-forte.

Il s'ouvre ici une vaſte carriere où les Phyſiciens pourront s'exercer. Preſque tout eſt devenu Phoſphore; & ſi tout abſolument ne le devient pas dans la ſuite, on ſera dans une ſurpriſe contraire à celle où l'on fut d'abord par la Pierre de Boulogne. On pourroit être étonné que la Pierre d'Aiman demeure toujours auſſi unique qu'elle l'eſt; car un très petit nombre de Corps Electriques, & qui d'ailleurs lui reſſemblent très peu par les effets, ne méritent pas d'être comptés.

OBSERVATION CHIMIQUE.

M. Le Fevre, Médecin d'Uzès, dont nous avons déja parlé en d'autres occaſions, a donné à l'Académie une nouvelle Obſervation, qui eſt une ſuite de ſon Phoſphore rapporté en 1728 *. Il s'apperçut que le Soufre commun, quoique très fixe, ſe diſſipe facilement, qu'il s'unit fort vîte avec le Fer, & qu'en les mêlant enſemble, le tout ſe change en un Colcothar, tout ſemblable à celui qu'on tire du Vitriol par une longue calcination. Il faut prendre de la Limaille de Fer & du Soufre dans les mêmes proportions que pour le Phoſphore, & quand la diſſolution du Fer ſera

* p. 48. & ſuiv.

sera exactement faite par l'Acide du Soufre, la matiere étant en pâte molle, on la tirera du Vaisseau, & on l'exposera à l'Air, où elle s'échauffera dans peu de tems, & rendra une odeur de Soufre brulant; & au-lieu que celle du Phosphore demeure toujours noire, celle-ci deviendra rouge en quelques heures, & en poudre fine, stiptique au goût. C'est-là le Colcothar, que l'on a par une operation très facile; & ce n'est pas une simple curiosité, puisque le Colcothar est employé dans la Médecine & dans les Arts.

Si l'on met ce Colcothar dans de l'eau chaude, on trouvera après l'avoir remuée, filtrée & évaporée, qu'il reste au fond du Vaisseau un vrai Vitriol de Mars, provenu de l'Acide du Soufre, qui s'est attaché au Fer, l'a corrodé, & s'est uni avec lui pour composer un corps salin très different du Soufre commun, & du Fer. Voilà donc un changement assez nouvau du Soufre en Sel; merveille qui est cependant diminuée parce que le changement ne tombe que sur la partie saline du Soufre transportée ailleurs, & qu'on ne tient pas compte de la partie inflammable. M. le Fevre laisse, dit-il, aux plus habiles le soin de chercher ce qu'elle est devenue.

Il conçut en réfléchissant sur ces expériences, que l'Eau de Chaux, qui dissout le Soufre commun, pourroit bien aussi le changer en Sel, parce que les Acides du Soufre, au-lieu d'agir sur le Fer, agiroient sur les parties terrestres Alkalines que cette Eau contient; & cela se trouva en effet par les mêmes operations, ou à très peu près, qu'on vient

vient de rapporter. Apparemment on réduiroit de même en Sel les Bitumes, les Résines, & toutes sortes d'Huiles & de Graisses.

Comme le Sel qui se tire du mélange de l'Eau de Chaux & du Soufre, est un Alkali fort semblable par toutes ses qualités à celui que donnent des Eaux minerales de Languedoc, telles que celles d'Ieuzet, de St. Jean, d'Alais, M. le Fevre conjecture que le secret de l'operation par laquelle la Nature rend minérales toutes ces Eaux, est découvert. Il se sera trouvé auprès d'une Source une terre ou chaux mêlée de Soufre commun, & l'eau ayant mis l'Acide du Soufre en état d'agir sur l'Alkali de la chaux, ou terre, il se sera formé les Sels dont il s'agit, qu'elle aura ensuite entraînés avec elle.

Quoique les Sels de toutes ces Eaux paroissent fort semblables, les terres sont très differentes, & leur difference influe principalement sur la quantité du Sel. Cela ne doit s'entendre que des Eaux qu'on a nommées.

Il ne faut pas oublier une singularité remarquable de celles d'Ieuzet. Dès qu'elles ont été quelques momens sur le feu, il se forme à leur surface de petites Aiguilles blanches, transparentes, égales en longueur & en grosseur, d'une régularité parfaite, & qui, selon l'Auteur, ressemblent au Sel Sédatif de M. Homberg.

M. le Févre, ne fût-ce que pour s'assurer de la découverte qu'il avoit faite du mystere de la composition de ces Eaux, n'a pas dû manquer d'essayer d'en faire par art. Il y a réussi assez facilement, & avec differentes ter-

terres. Ses Eaux artificielles ont la grande vertu des naturelles, qui est d'être fort rafraichissantes ; sans compter qu'elles sont purgatives & diurétiques.

NOus renvoyons entierement aux Mémoires

* L'Ecrit de M. Bourdelin sur le Sel lixiviel du Gayac.

† Une Maniere plus simple de M. Boulduc, pour faire le Sublimé corrosif.

* V. les M. p. 43. † V. les M. p. 508.

BOTANIQUE.

SUR LES GREFFES *.

NOus avons dit en 1728 † que M. du Hamel, dans le dessein de découvrir si l'Art de greffer pouvoit faire naître de nouvelles especes de Fruits, s'étoit engagé dans une suite d'expériences sur cette matiere. Celles dont nous allons donner le précis ne regardent point encore la multiplication des especes, elles n'ont pour objet que l'Art de greffer en lui-même. Il a été fort exageré par les Auteurs qui en ont écrit, & l'expérien-

* V. les M. p. 147. † p. 63. & suiv.

rience, qu'ils n'avoient pas assez consultée, rabat beaucoup de leurs discours.

Il est étonnant, quoique certain, & nous l'avons déja dit, que la Greffe fasse quelque bon effet, qu'elle rende les fruits meilleurs. Nous nous en tenons à la cause rapportée en 1728, qui cependant est assez peu particularisée, mais qui, du moins jusqu'à présent, ne peut guere l'être davantage. Cela posé, ou juge aisément qu'il faut un certain rapport entre le Sujet ou Arbre sur lequel on ente, & la Branche entée ou Greffe; que les diametres, les orifices, les figures des tuyaux se conviennent de part & sur-tout apparemment les Sèves, c'est-à-dire, qu'il faut que la Sève qui montera du Sujet s'accorde avec celle que la Greffe apportoit d'abord avec elle, & soit propre ensuite à être son unique aliment. Or les Sèves sont infiniment differentes entre elles, douces, acres, coulantes, visqueuses, aromatiques, fœtides, &c. Et l'on peut croire que de-là vient en grande partie l'amélioration des fruits. Ni le Sujet, ni la Greffe n'avoient une Sève entierement propre à produire un fruit d'une certaine qualité; il étoit nécessaire que la Sève du Sujet fût travaillée dans d'autres organes que les siens, & on lui présente ceux de la Greffe, qui lui sont convenables, & n'auroient travaillé que sur une autre Sève moins bien conditionnée.

Ces rapports ne peuvent être que très délicats, le raisonnement ne peut jamais deviner entre quels Arbres ils se trouveront, & l'expérience seule peut enseigner où ils se

trouvent. Quoique délicats, ils ne ſont pas uniques ; un même Sujet peut preſque toujours porter également à peu près differentes Greffes, & une même Greffe être appliquée à differens Sujets.

Voici les principales obſervations de M. du Hamel ſur cette matiere.

1°. La Greffe qu'il a reconnue pour réuſſir le mieux, eſt celle d'un Poirier ſur un autre, ou d'un Ceriſier ſur un Meriſier ; & celle qui réuſſit le plus mal eſt du Prunier ſur l'Orme; le Prunier périt auſſi-tôt. On voit bien qu'entre ces deux cas extrêmes, la varieté de tous les autres eſt infinie. Des Greffes qui réuſſiront, les unes reprennent plus ou moins facilement que les autres, pouſſent du bois & des feuilles plus ou moins vîte, &c. C'eſt la même choſe renverſée, pour celles qui ne réuſſiront pas.

2°. Outre le rapport inconnu qui doit être entre les Vaiſſeaux & les Sèves du Sujet & de la Greffe, il faut qu'il y en ait un, que l'on peut connoitre à peu près, entre les tems où le Sujet & la Greffe ont les principaux ſymptomes de leur végétation, où ils pouſſent, où ils ſont en Sève. Des Amandiers, greffés par M. du Hamel ſur des Pruniers de petit Damas noir, donnerent pendant une année entiere les plus belles eſperances du monde, & après cela tomberent tous en langueur, & la plupart périrent aſſez promptement. Il n'en faut point chercher la cauſe dans la diſproportion des Vaiſſeaux, ni des Sèves, puiſque la premiere année où cette diſproportion auroit dû avoir ſon plus

grand

grand effet, fut si belle & si heureuse. D'ailleurs, ce qui prouve beaucoup de conformité à cet égard entre le Prunier & l'Amandier, c'est qu'on greffe le Pêcher sur l'un & sur l'autre avec le même succès. Mais à l'égard des tems ou des Epoques remarquables de la végétation, il y a une grande difference entre le Prunier & l'Amandier, l'Amandier est toujours de beaucoup plus avancé. De-là il arrive dans les Greffes dont il s'agit, que l'Amandier peut demander de la nourriture au Prunier dans des tems où celui-ci n'est pas en état de lui en fournir, ou de lui en fournir assez. La Greffe ayant été faite en Automne, par ex. ils sont tous deux en repos pendant l'Hiver, l'un n'inquiete point l'autre; mais dès que l'Amandier a senti la premiere douceur du Printems que le Prunier ne sent pas encore, toute la Sève qu'il avoit apportée avec lui se met en mouvement, & il suce de plus celle du Prunier, qui peut suffire à cette dépense, parce que la branche de l'Amandier est encore très jeune, & se nourrit à peu de frais. Mais dès qu'elle est devenue plus grosse au bout de l'année, elle demande trop de nourriture au Prunier, & la lui demande toujours à contre-tems, lorsqu'il n'est pas encore en Sève. Le Sujet trop sucé & affamé par la Greffe, la Greffe mal nourrie, ou qui ne l'a pas été à propos, périssent tous deux, au moins d'une morte lente.

Si au contraire le Prunier a été greffé sur l'Amandier, la même mesintelligence à l'égard des tems se retrouve, mais avec un effet opposé. L'Amandier dès le premier commence-

ment du Printems fournit une nourriture que le Prunier n'eſt pas encore diſpoſé à recevoir, parce que ſes Vaiſſeaux ne ſont pas aſſez ouverts par une foible chaleur, que le reſſort de ſes fibres n'eſt pas aſſez animé, &c. Le Prunier meurt de réplétion & d'engorgement, au-lieu que dans le cas précédent il mouroit d'inanition.

3°. Dans ces deux expériences oppoſées, il ſe forme à l'endroit de l'inſertion de la Greffe ſur le Sujet une eſpece de bourlet, ou bien il s'y amaſſe une Gomme. Quelque mouvement que la Sève ait dans les Plantes, ſoit celui de circulation, ſoit tout autre, il faut toujours qu'elle ne demeure pas dans les Vaiſſeaux ſans mouvement. Dans la 2de expérience il eſt bien aiſé de comprendre que l'Amandier fourniſſant au Prunier une Sève qu'il ne peut recevoir, elle s'arrête & fait une obſtruction à l'endroit où elle devroit entrer dans le Prunier, c'eſt-à-dire, à l'endroit de l'inſertion. Mais dans la 1re expérience où le Prunier ne fournit pas aſſez à l'Amandier, & où l'Amandier tire trop, il ne paroît pas que ce ſoit la même choſe; cependant cela revient au même. Dans le tems que l'Amandier tire trop, le Prunier ſe deſſeche & s'amaigrit, ſes Vaiſſeaux perdent de leur capacité; & lorſqu'enſuite il eſt en Sève, il en a plus que ſes Vaiſſeaux n'en peuvent contenir à l'aiſe, elle ne s'y meut pas avec facilité, & il s'en fait des amas vers l'inſertion, parce que c'eſt là que finiſſent les vaiſſeaux du Sujet.

4°. Ces bourlets, ces gommes, &c. ſont

tout au moins des maladies avec lesquelles les Arbres peuvent vivre, mais ce sont souvent des causes de mort; la Sève arrêtée se corrompt ordinairement, comme notre sang, & dans les deux exemples rapportés une assez prompte mort est presque infaillible.

5°. Que la Greffe meure de la mort du Sujet, il n'y a rien là de remarquable. D'où pourroit-elle tirer sa subsistance? Mais si la Greffe ne peut pas survivre au Sujet, le Sujet peut survivre à la Greffe, ou se porter bien, tandis qu'elle est malade. Ses Sucs qui n'entrent plus ou n'entrent qu'avec peine dans des Vaisseaux étrangers, se meuvent librement dans les siens propres, & font de nouveaux dévelopemens de parties, qui sont de nouveaux jets.

6°. La Greffe peut être utile au Sujet, & le faire vivre plus longtems, ce qui est une espece de paradoxe. Cela vient de ce qu'elle lui ôte des qualités vicieuses, ou en empêche l'effet. Le Pêcher de noyau est fort délicat, & en même tems abondant en productions inutiles qui l'épuisent; il pousse beaucoup de bois qu'il faut retrancher, il est presque toujours plein de bois mort, le tronc lui-même meurt aisément, & enfin l'Arbre dure peu d'années. M. du Hamel ayant fait enter sur des Pêchers de cette espece des Pruniers de la Reine Claude, il y a déja 18 ans que ces Arbres greffés durent, quoique languissans, & ils n'eussent certainement pas joui d'une si longue vie, si les Pêchers, qui abandonnés à eux-mêmes auroient eu une végétation excessive & indiscrete, n'en eussent trou-

vé le remede dans celle des Pruniers, qui la moderoit en ne tirant que les sucs qui se pouvoient dépenser utilement.

7°. Quelques Arbres vivent plus longtems greffés sur des Sujets foibles, & qui durent peu, que sur des Sujets plus robustes, & plus vivaces. Le Prunier dure plus que le Pêcher de noyau, cependant le Pêcher nain dure plus longtems sur le Pêcher de noyau que sur le Prunier. C'est-là un effet bien sensible d'une convenance que l'on eût pu conjecturer sur les noms seuls de ces Plantes; mais il se trouve & il se trouvera encore à l'avenir une infinité de ces rapports, qui seront tout à fait imprévus.

8°. En général, quelque rapport qu'il puisse y avoir entre le Sujet & la Greffe, M. du Hamel conclud de ses expériences, que les Arbres greffés durent moins que s'ils ne l'avoient pas été. La Greffe raffine les sucs, & rend les fruits meilleurs; mais d'un autre côté elle fait toujours violence à la nature, en alterant la constitution organique de l'Arbre. Il n'est pas hors d'apparence que, toutes choses d'ailleurs égales, les peuples sauvages ne vivent plus, que ceux qui sont civilisés & polis.

SUR

SUR L'ANATOMIE DE LA POIRE *.

LES Plantes étant bien ſurement des corps organiſés, les fruits qui en ſont les parties les plus nobles, & celles pour leſquelles toutes les autres ſont faites, ne peuvent manquer non ſeulement d'être organiſés auſſi, mais de l'être plus finement, & avec plus d'art. La difficulté n'eſt que de découvrir cette organiſation. L'Anatomie des Animaux, dès qu'ils ſont un peu grands, eſt en quelque ſorte groſſiere & facile; une charpente d'Os bien liés enſemble, de gros Vaiſſeaux ſanguins, &c. ſe préſentent d'eux-mêmes aux yeux. Mais il n'en va pas ainſi d'une Pêche, d'un Abricot, d'une Pomme; à l'exception des Noyaux, ou des Pepins, on n'y voit qu'une chair, un parenchyme uniforme, qui n'a point de parties diſtinctes les unes des autres, & où la diſſection ne paroît avoir aucune priſe. Cependant, quelques grands Obſervateurs ont entrepris de faire celle de la Poire, qu'ils ont peut-être préférée, parce que ce fruit, lorſqu'il eſt pierreux, a plus de diverſité dans ſa ſubſtance que beaucoup d'autres; & M. du Hamel a voulu marcher ſur leurs pas.

Après qu'il a eu eſſayé differens moyens pour parvenir à diſſequer des Poires, differentes liqueurs, qui par la maceration rendis-

* V. les M. p. 426.

diffent leurs petits organes plus visibles, enfin il a trouvé que la liqueur la plus favorable étoit l'Eau commune. Mais pour donner une idée ou du travail, ou de la patience que demande l'operation, il nous suffira de dire que quelquefois il a fallu laisser macerer une Poire pendant deux ans, & que souvent quand on a commencé à en détacher bien adroitement avec un instrument très fin un filet, qui est quelque Vaisseau, il faut pour achever de le détacher, remettre la Poire en maceration encore quinze jours. La dissection a toujours été faite sur des fruits qui nageoient dans l'eau, afin de profiter autant qu'il étoit possible de leur augmentation de volume, quoique petite, & de la disposition que les differentes parties pouvoient prendre à se separer. On juge bien que les meilleurs Microscopes ont été mis en usage.

Il ne s'agit encore présentement que de la peau de la Poire, par où M. du Hamel a commencé; le reste viendra dans les années suivantes. Nous avons fait en 1702 * une description abrégée de la peau du Corps humain composée de trois Membranes, qui s'envelopent les unes les autres; celle de la Poire l'est de quatre, que M. du Hamel a eu l'art de distinguer. Il appelle la 1re envelope *Epiderme*, la 2de *Tissu muqueux*, à cause d'une certaine viscosité, la 3me *Tissu pierreux*, & la 4me *Tissu fibreux*.

L'Epiderme de la Poire a assez d'analogie avec celui de l'Homme. C'est une membrane d'une

* p. 40. & suiv.

d'une consistence plus ferme que celle du fruit, & par-là destinée à le défendre des injures du dehors : elle réduit la transpiration du fruit à être de la quantité nécessaire, & parce que son tissu serré en empêche l'excès, & parce que le grand nombre de pores, dont elle est percée, ouvrent assez de passages. Cet Epiderme tombe par petites écailles comme celui de l'Homme, & se régénere de même sans laisser de cicatrice. On ne sait pas encore si notre Epiderme est produit par l'épaississement de quelque suc arrivé à la superficie extérieure du corps, ou par l'expansion des derniers filets très déliés de quelques Vaisseaux; à plus forte raison cette détermination ne sera-t-elle pas aisée à faire pour la Poire. M. du Hamel inclineroit à penser que son Epiderme est la derniere superficie du Tissu muqueux condensée par l'air.

Ce Tissu, immédiatement posé sous l'Epiderme, & très difficile à en détacher, est apparemment formé par un entrelacement de Vaisseaux très délies, & pleins d'une liqueur un peu visqueuse. Il est vert naturellement, mais quand la Poire a pris du rouge par le Soleil, quelquefois cette couleur ne passe pas l'Epiderme, quelquefois elle pénétre jusqu'au Tissu muqueux, & le pénétre même tout entier. Il est sujet à des accidens & à des maladies, les coups de Grêle le meurtrissent & le dessechent, la trop grande humidité le corrompt, quelques Chenilles s'en nourrissent après avoir détruit l'Epiderme, une très petite Mitte, qui n'a point entamé l'Epiderme, va le manger. Quand il est détruit dans tou-

te son épaisseur, il ne se régénere point, il se forme à sa place une espece de Galle gommeuse.

La troisieme envelope ou partie de la peau totale de la Poire, est le Tissu pierreux. On sait assez ce que c'est que ce qu'on appelle *pierres* dans la Poire, ces grumeaux plus durs que le reste de sa substance, tantôt plus, tantôt moins gros, & quelquefois amoncelés en petits Rochers. On nomme les Poires *cassantes*, ou *fondantes*, selon qu'elles en ont ou n'en ont pas, ou en ont moins. Ces pierres n'appartiennent pas seulement à cette envelope qui est le Tissu pierreux, elles se trouvent répandues dans tout le reste du fruit; mais elles sont arrangées dans ce Tissu plus régulierement les unes à côté des autres, & enfin elles le sont de maniere à former une envelope, ce qui suffit ici. Comme elles sont de la même nature que les autres, il sera à propos de les considerer toutes ensemble.

Elles commencent dès la queue de la Poire, & s'étendent sur toute sa longueur, posées entre les Tégumens de cette queue, & un faisceau de Vaisseaux qui en occupent l'axe. Quand elles sont entrées dans le fruit, il y en a une partie qui s'épanouït, & va former le Tissu pierreux en tapissant toute la surface intérieure du Tissu muqueux; l'autre partie se tient serrée le long de la queue prolongée, ou de l'axe de la Poire, & y forme comme un canal pierreux d'une certaine largeur. Ce canal arrivé à la région des Pepins se partage à droite & à gauche, prend

plus

plus de largeur de part & d'autre, & ensuite va se réunir au-dessus des Pepins, & reprend la forme de canal pour aller aboutir à l'Ombilic, ou à la Tête de la Poire. Il y trouve le Tissu pierreux, auquel il s'unit, & tous deux ensemble forment un Rocher très sensible.

Cela n'empêche pas qu'il n'y ait des pierres jettées çà & là moins régulierement dans le reste du corps de la Poire. Elles sont liées par une substance plus molle, & plus douce. Il y en a, mais de beaucoup plus petites, jusque dans les Poires qu'on appelle *fondantes*.

La difficulté est de savoir quelles parties organiques sont ces Pierres, & quel est leur usage. M. du Hamel croit le pouvoir conjecturer sur les observations suivantes, faites avec grand soin dans l'esperance de quelque éclaircissement. Les pierres ne sont pas sensibles dans les fruits nouvellement noués, ce ne sont que de petits grains blancs sans solidité; mais ils durcissent ensuite & grossissent à tel point, que les fruits encore fort petits ne sont presque que des pierres, moins dures cependant qu'au tems de la maturité, mais en plus grand nombre par rapport au volume du fruit, car à mesure que le fruit croît depuis un certain point, les pierres ou croissent moins, ou ne croissent plus, & même il en disparoît. Quand elles sont dans leur parfaite grosseur, on peut voir quantité de filets, ou qui y entrent, ou qui en sortent. Leur substance n'est point formée par lames ou par couches, mais par grains.

Sur tout cela M. du Hamel conjecture que

les Pierres sont des Glandes végétales analogues aux animales, & qui font des sécrétions de sucs. On fera aisément l'application de cette idée à ce qui vient d'être dit : seulement sera-t-il peut-être à propos d'expliquer comment les Pierres cessent de grossir, tandis que le fruit grossit encore. C'est que des sucs tartareux & pierreux s'amassent facilement dans des conduits très étroits, & n'y peuvent plus couler. La Glande ou Pierre ne croîtra donc plus, & même elle diminuera, soit par une transpiration qui ne sera point réparée, soit par un reflux de sucs dans le reste du fruit; il continuera de croître en l'un & en l'autre cas.

M. du Hamel observe que le tems où le fruit noue, & un peu après, étant précisément le tems où l'Arbre travaille le plus à la production des Pepins, partie si importante, les Glandes végétales sont alors & en plus grand nombre & plus molles, pour fournir mieux les sucs nécessaires. Quand elles se sont obstruées, & qu'elles ont acquis leur derniere dureté, qui ne leur permet plus la fonction de filtrer, elles ne deviennent pas pour cela inutiles, elle prennent la fonction d'Os, & servent d'appui aux autres parties du fruit, qui ont moins de consistence.

Une chose qui convient encore fort heureusement à l'idée de Glandes appliquée aux Pierres, c'est cette Roche qu'on voit à l'Ombilic de la Poire, cet amas de pierres plus grand qu'en aucun autre endroit. C'étoit là justement au tems de la fleur, que les Etamines & les Pétales prenoient naissance; c'étoit

toit là que se faisoient les plus importantes filtrations de sucs, & que des Glandes étoient le plus nécessaires.

Il reste la quatrieme enveloppe qui fait partie de la Peau de la Poire, & qui est posée sous le Tissu pierreux. M. du Hamel l'appelle *Tissu fibreux*, parce que, comme la peau proprement dite des Animaux, il est formé d'un entrelacement perpétuel de Vaisseaux anastomosés les uns avec les autres. Ce n'a pas été sans beaucoup d'art, que ce dernier Tégument de la Poire a pu être démêlé d'avec les trois supérieurs ou plus extérieurs: mais il faudroit encore plus de sagacité d'esprit, & presque de la divination, pour démêler précisément les usages particuliers de chacun des quatre. M. du Hamel ne s'est pas engagé dans un détail qui ne seroit pas assez fondé sur l'expérience: il est plus sage d'éviter les raisonnemens où l'on n'est pas conduit par les faits.

OBSERVATIONS BOTANIQUES.

I.

M. Benoît Stéhélin, de Bâle, Correspondant de l'Académie, a écrit à M. Danty d'Isnard, qu'il avoit découvert dans la *Filicula Saxatilis, corniculata, Inst. R. H.* 542, que l'Anneau qui entoure l'Ovaire des Plantes Capillaires en doit être la partie spermatique, c'est-à-dire, celle où est renfermée cette poussiere,

ſiere, qui féconde l'Ovaire. Car dans cette eſpece l'Anneau eſt entouré de Zones tranſverſales élaſtiques, qui en ſe rompant laiſſent échaper la matiere qu'il contient, & cette matiere a la couleur jaune des Spermes ou pouſſieres des autres Plantes. Quand elle eſt ſortie, on voit les Anneaux vuides, tranſparens, non colorés, pliſſés d'une infinité de plis preſque imperceptibles; quelques-uns de ces Anneaux ont conſervé leur premiere figure, & d'autres ont crevé. On ne peut obſerver la matiere ſpermatique que dans le tems où les ſillons des feuilles de la Plante, qui contiennent l'Anneau & l'Ovaire, ſont encore fermés.

VI.

Le même M. Stéhélin a vu un nouveau phénomene dans l'*Equiſetum*, la Prêle. Sa pouſſiere, entourée de lames élaſtiques, eſt d'un vert foncé, & elle eſt d'un gris-pâle de cendre, quand ces lames ſe ſont débandées. Qu'on la mette ſur quelque choſe d'humecté, elle redevient en un moment de ſon premier vert. Ainſi il paroît que c'eſt l'humidité des lames qui lui donne la verdeur, & quand ces lames ſe deſſechent, elle doit la perdre, ou même en avoir plus ou moins, ſelon que les lames humides la ſerreront & s'y appliqueront plus ou moins par un mouvement de contraction & de débandement.

III.

III.

M. Sarrazin, Médecin de Quebec, Correspondant de l'Académie, a trouvé dans l'Amérique Septentrionale quatre especes d'Erable, qu'il a envoyées au Jardin Royal, après leur avoir imposé des noms. La 4me qu'il appelle *Acer Canadense Saccbariferum, fructu minori, D. Sarrazin*, est un Arbre qui s'éleve de 60 ou 80 pieds, dont la Sève, qui monte depuis les premiers jours d'Avril jusqu'à la moitié de Mai, est assez souvent sucrée, ainsi que l'ont aisément reconnu les Sauvages & les François. On fait à l'Arbre une ouverture, d'où elle sort dans un Vase qui la reçoit, & en la laissant évaporer, on a environ la 20me partie de son poids, qui est de véritable Sucre, propre à être employé en Confitures, en Sirops, &c. Un de ces Arbres qui aura 3 ou 4 pieds de circonference, donnera dans un Printems, sans rien perdre de sa vigueur, 60 ou 80 livres de Sève. Si on en vouloit tirer davantage, comme on le pourroit, il est bien clair qu'on affoibliroit l'Arbre, & qu'on avanceroit sa vieillesse.

Cette Sève pour être sucrée demande des circonstances singulieres, qu'on ne devineroit pas, & que M. Sarrazin a remarquées par ses expériences. 1°. Il faut que dans le tems qu'on la tire, le pied de l'Arbre soit couvert de Neige, & il y en faudroit apporter, s'il n'y en avoit pas. 2°. Il faut qu'ensuite cette Neige soit fondue par le Soleil, & non par un air doux. 3. Il faut qu'il ait ge-

tiés de chaque feuille pour les appliquer l'une contre l'autre, celle-ci les ferme en dessous; si lorsqu'elles sont dans leur position ordinaire, on les releve un peu avec les doigts pour les regarder de ce côté-là, elles se ferment aussi-tôt malgré qu'on en ait, & cachent ce qu'on vouloit voir. Elles en font autant au coucher du Soleil, & il semble qu'elles se préparent à dormir. Aussi cette Plante est-elle appellée tantôt *Chaste*, tantôt *Dormeuse*: mais outre ces noms, qui lui conviennent assez, on lui a donné quantité de vertus imaginaires, & il n'étoit guere possible que des Peuples ignorans s'en dispensassent.

Cette Plante aime les lieux chauds & humides, sur-tout les bois peu touffus, où se trouve une alternative assez égale de Soleil & d'ombre. M. Garsin en a reconnu deux especes.

Il a traité tout ce Sujet selon la méthode la plus exacte des Botanistes, au-lieu que nous n'en avons pris que ce qu'il y a de plus interessant pour la curiosité ordinaire.

GEO-

GEOMETRIE.

SUR UNE THEORIE GENERALE DES LIGNES DU QUATRIEME ORDRE *.

NOus ayons déja entamé cette matiere en 1729 †, quoique legerement, tant à l'occasion d'un Ecrit de M. Nicole sur les Lignes du 3me ordre, que d'un autre de M. de Maupertuis sur une affection singuliere de quelques-unes du 4me. Mais une Théorie générale de ces dernieres Lignes, entreprise par M. l'Abbé de Bragelongne, nous ouvre un champ, sans comparaison plus vaste; & nous pourrions dire, en changeant un seul mot dans un beau vers de Virgile,

Magnus ab integro Curvarum *nascitur ordo.*

Car au pied de la lettre, cet ordre contient un très grand nombre de Courbes; & M. de Maupertuis, le seul qui y ait touché jusqu'à présent, n'a touché qu'à une de leurs propriétés.

El-

* V. les M. p. 226. & 517. † p. 49. & 59.

Elles sont, les unes finies, ou rentrantes en elles-mêmes, comme le Cercle & l'Ellipse; les autres infinies, comme la Parabole, & l'Hyperbole; les autres *mixtes* de ces deux especes. Les finies, qui ne doivent pas être si simples que le Cercle, se nouent & se renouent plusieurs fois en forme de rubans. Les infinies, où n'ont pas des Asymptotes droites, non plus que la Parabole, mais en ce cas elles en ont de courbes; ou elles peuvent être *inscrites* à leurs Asymptotes droites, ou *ambigenes*, ainsi que nous l'avons expliqué en 1722. Les Courbes mixtes, après s'être renfermées dans un espace déterminé, se nouent, & portent leurs branches dans l'Infini. Quelquefois ces branches infinies ne partent pas de cet espace déterminé & circonscrit, elles le rencontrent en leur chemin, & le traversent comme une branche d'Hyperbole traverseroit par une espece de hazard un Cercle ou une Ellipse. Cependant ces espaces, ou plutôt ces Contours fermés, qu'on peut appeller en général des *Ovales*, appartiennent essentiellement à la Courbe, & en font partie. Ils en font même encore une partie essentielle, lorsqu'ils en sont entiérement détachés, & comme isolés. On les appelle alors *Ovales conjuguées*, parce qu'elles se rapportent à la Courbe, quoique sans liaison sensible; si elles y étoient attachées de quelque façon que ce fût, comme lorsqu'elles seroient traversées par une branche de la Courbe, on les appelleroit *adhérentes*. Il y a plus: des points mathématiques, qui ne se trouvent dans aucun des contours de la Courbe,

be, ne laissent pas de s'y rapporter, non pas comme des centres ou des foyers, mais comme des points qui seroient dans quelque contour de la Courbe, & cependant ils n'y sont pas, ils ont des Abscisses & des Ordonnées qui leur répondent, aussi-bien qu'à tous les autres points du cours de la Courbe, ils en sont des parties qui ne peuvent être apperçues par les yeux, mais seulement par une recherche subtile de l'esprit. Enfin si les Lignes du 3me ordre peuvent avoir des Inflexions & des Rebroussemens, à plus forte raison celles du 4me, susceptibles par leur nature d'une plus grande complication, & qui à l'égard de ces deux affections la portent si loin, qu'elles peuvent quelquefois, ainsi qu'il a été dit, les avoir d'une maniere invisible. On seroit frappé des variétés, & des bizarreries des Lignes du 4me ordre, si on en voyoit les plus singulieres & les plus dissemblables tracées sur le plan.

Il faut cependant que l'Algebre attrape & démêle par ses fines operations toutes ces varietés, & ces bizarreries. Elle ne le peut qu'en dévelopant avec industrie l'Equation, où toute la Courbe avec tout ce qui lui appartient est contenue, &, pour ainsi dire, roulée à peu près comme une Plante dans son germe. Là sont renfermées toutes les droites qui ont rapport à la Courbe, & la déterminent, Abscisses, Ordonnées, Tangentes, Sécantes, &c. Les Abscisses & les Ordonnées, & toutes les autres qui en dépendent, sont représentées par les Racines de l'Equation, égales ou inégales, positives, ou

ou négatives, ou imaginaires, & ces imaginaires mêmes sont d'une grande utilité. Il s'agit donc de tirer d'une Equation toutes ses Racines, de les combiner ensemble, & de voir tout le jeu géométrique qu'elles peuvent produire.

En général, une Ligne quelconque ne peut jamais être coupée par une ligne droite, qu'en autant de points que le plus haut Exposant de son Equation a d'unités. Ainsi une ligne droite pouvant avoir, aussi-bien qu'une Courbe, des Abscisses & des Ordonnées, dont l'Equation ne peut avoir pour Exposant que 1, une ligne droite ne peut être coupée par une autre droite qu'en 1 point; les 4 Sections Coniques, qui sont les premieres Courbes, ne peuvent être coupées par une droite qu'en 2 points, parce que leur Equation n'est que du 2^d^ degré; les lignes du 3me ordre en 3 points, &c. En effet, il est évident qu'une droite, qui a une fois coupé ou rencontré une autre droite, ne peut plus à cause de la rectitude de son cours la rencontrer une 2de fois; si l'on vouloit qu'elle la rencontrât encore, il faudroit que cette droite coupante changeât de nature, perdît sa rectitude, & alors en se détournant de son premier cours elle pourroit revenir trouver une 2de fois la droite déja coupée. Si l'on vouloit qu'elle y revînt une 3me fois, il faudroit alterer davantage sa rectitude, & toujours ainsi de suite: d'où l'on voit que les Courbes sont, selon cette idée, d'autant plus courbes qu'une droite les peut couper en plus de points, & que leurs differens ordres, en y comprenant mê-

même les lignes droites, ont été légitimement établis ſur ce fondement.

Toute droite n'eſt pas obligée à couper une Courbe en autant de points qu'il y a d'unités dans l'Expoſant de ſon Equation, ou, ce qui eſt le même, de ſon ordre; il ſuffit qu'il y ait quelque droite qui le faſſe, & celle qui l'a une fois fait ne peut plus rencontrer la Courbe en aucun autre point.

L'interſection ſe fait par un ſeul point commun aux deux lignes quelconques; mais l'attouchement, qui ne peut être qu'entre une droite & une Courbe, ou entre deux Courbes, ſe fait par deux points communs aux deux lignes; & comme deux points déterminent la poſition d'une droite, de-là vient que la Tangente & la Courbe touchée ont la même poſition en ligne droite à l'endroit de l'attouchement, ou, ce qui revient au même, qu'une droite infiniment petite, qui eſt un côté de la Courbe, lui eſt commune avec la Tangente. Un attouchement, qu'on ne laiſſe pas d'appeller un point, vaut donc deux points d'interſection; & les Courbes, telles que les Sections Coniques, qui ne peuvent être coupées par une droite qu'en deux points, ne peuvent plus être ni coupées, ni abſolument rencontrées par cette droite, dès qu'elle a été leur Tangente. Dans l'ordre ſuivant, qui eſt le 3me, une Tangente pourroit bien être encore enſuite Sécante de la Courbe, mais non pas Tangente une 2de fois, car deux attouchemens vaudroient 4 points d'interſection, qui ſont impoſſibles dans cet ordre.

Puisque dans une Inflexion deux côtés de la Courbe sont exactement posés bout à bout en ligne droite, la Tangente au point d'inflexion a donc ces deux côtés de la Courbe communs avec elle, & si le simple attouchement fait par un seul côté valoit deux points d'intersection, celui-ci fait par deux côtés doit valoir 3 points d'intersection; ce qui se voit encore en ce qu'à 1 côté répondent 2 Ordonnées, 3 à 2 côtés, &c. & que chaque Ordonnée ne répond naturellement qu'à un point de la Courbe. De ce que l'attouchement au point d'inflexion vaut 3 points d'intersection, il suit, & qu'on ne doit commencer à trouver des inflexions que dans le 3me ordre, & que dans cet ordre une Tangente au point d'inflexion ne peut plus rencontrer la Courbe.

Si, comme nous l'avons expliqué en 1729*, deux inflexions s'unissent & se confondent, il y aura 3 côtés mis exactement bout à bout en ligne droite, & par conséquent l'attouchement en ce point vaudra 4 points d'intersection: cette affection ne peut donc se trouver que dans le 4me ordre, & les supérieurs; & la Tangente qui aura rencontré une ligne du 4me en un point de cette espece, ne la rencontrera plus en aucun autre point.

On peut pousser aussi loin qu'on voudra l'idée de ces inflexions qui se confondent, de sorte qu'une inflexion sera simple, double, triple, quadruple, &c. & il est clair qu'à mesure que l'inflexion se compliquera, la Courbe sera d'un ordre plus élevé.

* p. 59. & suiv.

Il faut ſeulement remarquer que l'inflexion qui étoit inviſible dans le cas de 1729, où n'étoit que double, ne ſera pas inviſible de même dans tous les autres cas, mais ne le ſera qu'alternativement. Lorſqu'elle n'étoit que double, on imaginoit un arc concave, un convexe & un concave qui ſe ſuivoient, & l'arc convexe étant ſupprimé, les deux concaves s'uniſſoient, & par-là étoit effacée toute apparence d'inflexion. Si l'inflexion étoit triple, il faudroit imaginer un arc concave, un convexe, un concave & un convexe, & les deux du milieu étant ſupprimés, car il ne doit jamais reſter que les deux extrêmes, un arc concave & un convexe s'uniront, ce qui eſt la forme naturelle de l'inflexion. Il eſt évident après cela, que ſi l'inflexion eſt quadruple, elle redevient inviſible, & toujours ainſi de ſuite, tant qu'elle aura une dénomination paire, au-lieu qu'elle ſera viſible dans toutes les impaires.

Nous avons dit en 1729, que dans le cas de l'inflexion double, la plus ſimple des compliquées, l'arc ſupprimé de la Courbe devoit être conçu, non comme anéanti abſolument, mais comme ayant tous ſes côtés infiniment petits du 1er ordre réduits à n'être plus que du 2d. Quand l'inflexion eſt triple, ou quadruple, &c. il n'eſt nullement beſoin de concevoir que les côtés des arcs ſupprimés ſoient réduits à une plus grande petiteſſe que celle du 2d ordre, car une plus grande ou une moindre étendue ſupprimée ne fait rien à la choſe; & on peut remarquer en paſſant, que ſelon le Syſtême de la Courbure établi dans

la *Géométrie de l'Infini*, la courbure fera toujours infinie dans les inflexions dont nous traitons ici, & peut-être tout autre Syftême géométrique auroit-il eu de la peine à en rendre raifon.

A mefure que les Courbes en s'élevant d'ordre deviennent plus compliquées les droites qui s'y rapportent le deviennent auffi davantage, toutes droites qu'elles font, c'eft-à-dire, que les fonctions qu'elles ont par rapport aux Courbes fe compliquent. Ainfi la fonction la plus générale & la plus fimple des droites par rapport aux Lignes d'ordres quelconques étant de les rencontrer, une droite ne peut rencontrer une Ligne du 1er ordre ou une autre droite qu'en un feul point, où elle fera fa Sécante; dans le 2d ordre la droite peut être ou la Sécante d'une Section Conique en deux points differens, ou fa Tangente par deux points infiniment proches, & elle ne peut être l'un & l'autre; dans le 3me ordre une droite peut être ou Sécante d'une Courbe en trois points differens, ou Tangente en deux infiniment proches, & Sécante en un autre different, ou Tangente en trois infiniment proches, auquel cas ces trois points font une inflexion fimple. En voilà affez pour faire voir comment la fonction de *rencontrer* qui appartenoit à une droite par rapport aux Lignes d'ordres quelconques, fe complique toujours felon que les ordres font plus élevés; car il fera très aifé de fuivre cette idée fi loin qu'on voudra.

Quand la fonction de la droite fe complique, elle devient équivalente à plufieurs diffe-

ferentes droites selon le nombre de ses complications. Une Tangente est équivalente à deux droites sécantes, & parce que les deux points où elle rencontre la Courbe sont infiniment proches, elle ne peut être équivalente qu'à 2 lignes égales. Si elle est la Tangente d'une inflexion simple, elle sera équivalente à 3 lignes égales; à 4, si elle est Tangente d'une inflexion double; à 5, si elle l'est d'une inflexion triple, &c. Si, outre qu'elle est simple Tangente, ou Tangente d'une inflexion quelconque, elle est encore Sécante en 1, en 2, &c. autres points, elle sera équivalente à autant de droites égales que le simple attouchement, ou que l'inflexion en demandera, & de plus à autant de droites inégales qu'il y aura de points d'intersection. Dans le 4me ordre, que nous traitons ici, une droite pouvant être ou Sécante en 4 points, ou simple Tangente, & ensuite Sécante en 2 points, ou simple Tangente, & ensuite encore simple Tangente, ou Tangente d'une inflexion simple, & ensuite Sécante en 1 point, ou Tangente d'une inflexion double, cette droite pourra être équivalente ou à 4 droites inégales, ou à 2 égales, & encore à 2 autres égales differentes des 1res, ou à 3 égales, & à 1 inégale, ou à 4 égales.

C'est-là ce que l'Algebre sent, pour ainsi dire, avec une extrême finesse. Si on a, par exemple, l'expression algébrique d'une droite qui doive rencontrer une Ligne du 4me ordre ou Courbe du 3me, cette expression sera une Equation du 4me degré, qui par conséquent aura quatre Racines. Ces Racines seront

ront autant de valeurs de la droite, dont il s'agit, & cette droite ſera par-là équivalente à quatre grandeurs. Il arrivera préciſément ſelon les differens cas, que nous venons de marquer, que ces quatre grandeurs ou racines ſeront, ou toutes quatre inégales, ou qu'il y en aura deux égales, & deux autres differentes, égales entre elles, ou trois égales & une inégale, ou quatre égales. L'Algébre repréſentera exactement le caractere de chaque cas particulier.

Tout ce que nous avons dit ſur les Inflexions s'applique ſans peine aux Rebrouſſemens: il n'y a qu'à concevoir des arcs directs & rebrouſſans, au-lieu d'arcs concaves & convexes. On verra comment la ſuppreſſion de certaines portions de la Courbe qui a produit des inflexions multiples, & les a rendues alternativement viſibles & inviſibles, fera les mêmes effets ſur les rebrouſſemens. Puiſque le Rebrouſſement ſimple, ainſi qu'il a été prouvé dans la *Géométrie de l'Infini*, eſt formé par deux côtés infiniment petits exactement poſés l'un ſur l'autre, ou l'un à côté de l'autre, la Tangente en cet endroit ſera équivalente à trois droites égales, ou aura trois racines égales, quatre ſi le rebrouſſement eſt double, parce qu'il y aura trois côtés, & toujours ainſi de ſuite. La Tangente pourra encore être Tangente, ou Sécante en un autre endroit ſelon l'ordre de la Courbe, & l'égalité ou l'inégalité de ſes valeurs ou racines. Il faut concevoir auſſi que la ſuppreſſion de quelque portion de la Courbe, qui a cauſé le rebrouſſement multiple, n'a

été

été que la réduction de ses côtés au 2d ordre d'infiniment petit.

Nous n'avons employé jusqu'ici que les Tangentes pour faire entendre plus nettement de quelle maniere une droite devient équivalente à plusieurs par la multiplication de sa fonction, car comme cette équivalence détermine les principales affections des Courbes, & qu'elle se découvre par l'Algebre, c'est là que toutes les recherches doivent tendre. Mais ce ne sont pas les Tangentes que les Equations Algébriques des Courbes expriment directement, ce ne sont que les Abscisses & les Ordonnées, dont le rapport perpétuel constitue la nature de la Courbe, & il faut voir comment ces droites-là peuvent être multiples. Nous ne prendrons plus ce mot de multiples que dans un sens plus étroit, & nous ne le donnerons qu'aux lignes, soit Abscisses, soit Ordonnées, qui ayant plusieurs valeurs, les auront toutes égales.

Il est certain déja qu'une Ordonnée ou Abscisse pouvant être Tangentes de la Courbe, elles seront multiples de la même multiplicité dont une Tangente pourra l'être selon le cas. Mais il faut approfondir un peu plus cette matiere.

Une Ordonnée ou Abscisse est multiple, quand sa fonction naturelle d'Ordonnée ou d'Abscisse est multipliée, ou, ce qui est à peu près le même, quand elle fait seule ce que faisoient en d'autres cas plusieurs differentes lignes de la même espece.

Que l'on conçoive un demi-Cercle rapporté

té à une droite extérieure, qui en sera à quelque distance, & vers laquelle il tournera sa convexité; de cette droite comme Axe partiront des Ordonnées terminées à tous les points du demi-Cercle. La fonction naturelle d'une Ordonnée étant de se terminer à un point de la Courbe, toutes ces Ordonnées seront simples, hormis celles des deux extrémités du demi-Cercle, car ces deux-là seront Tangentes, & se termineront chacune à deux points du demi-Cercle infiniment proches, tandis que toutes les autres ne se termineront qu'à un seul. Ces deux seront donc des Ordonnées doubles.

La fonction des Abscisses est de porter à leur extrémité une Ordonnée, & ici afin que deux Abscisses portent deux Ordonnées égales, il faut qu'elles soient inégales. Mais si l'on conçoit que cette inégalité ou difference des deux Abscisses diminue toujours, & devienne enfin nulle, il y aura par conséquent un point où une seule Abscisse fera la fonction de deux. Ce point est celui qui répond au milieu du demi-Cercle. L'Abscisse de ce point sera donc double, toutes les autres étant simples. Et en effet si le demi-Cercle venoit se poser sur l'axe, cette Abscisse seroit sa seule Tangente.

Pour s'assûrer encore plus que la duplicité de l'une de ces deux lignes, Abscisse ou Ordonnée, n'emporte point nécessairement celle de l'autre, on peut remarquer que dans le 1er cas, qui est celui de l'Ordonnée double, toutes les Abscisses étoient constamment simples, tant celles des deux Ordonnées Tangentes

gentes que de toutes les autres, & qu'il n'est arrivé aucun changement à ces Abscisses, parce qu'on a consideré en quoi quelques Ordonnées differoient des autres. De même dans le 2d cas, où l'on a trouvé une Abscisse double, l'Ordonnée qui y répondoit étoit constamment simple, & n'a reçu nul changement par la consideration qu'on a faite de ce que son Abscisse avoit de particulier.

Ce qu'on a dit ici de la duplicité, suffit pour donner une idée générale de la multiplicité.

Il y a encore une maniere dont la fonction de l'Ordonnée peut être multipliée, c'est lorsque l'Ordonnée se termine à un point où se coupent deux ou plusieurs branches de la Courbe; car alors chaque branche ayant sa suite d'Ordonnées qui lui appartient, distincte d'une autre suite, l'Ordonnée qui se trouve au point d'intersection des branches, appartient en même tems à ces differentes Suites, & fait autant de fois selon leur nombre la fonction d'Ordonnée, elle a autant de racines égales. S'il arrive qu'elle soit en même tems Tangente d'une branche, elle aura une racine égale de plus. Si l'attouchement se fait à une inflexion ou rebroussement simple ou multiple de la branche touchée, on verra sans peine par la simplicité ou multiplicité de l'inflexion ou du rebroussement, combien le nombre des racines égales doit augmenter.

Tout cela suppose que les racines d'une Ordonnée soient affectées du même Signe plus ou moins, car si elles sont affectées de differens Signes, elles ne sont plus la même Or-

Ordonnée, fussent-elles égales ; celles qui ont plus ou les positives étant au-dessus de l'Axe, celles qui ont moins ou les négatives sont au dessous.

L'Abscisse est autant de fois multiple, que sa fonction de porter une Ordonnée est multiple dans le cas qui vient d'être exposé, non pas autant de fois que le seroit son Ordonnée par être Tangente simple ou multiple de quelque branche, cela est absolument étranger à l'Abscisse, mais autant de fois seulement que l'Ordonnée sera multiple par être au point d'intersection de plusieurs branches; car l'Abscisse sera autant de fois Abscisse, qu'il y aura d'Ordonnées differentes, quoiqu'égales, qui viendront se placer sur le même point de l'Axe.

Par cette même raison, l'Abscisse qui répond à un point de Rebroussement simple est deux fois Abscisse, car elle porte deux Ordonnées, dont l'une appartient à la suite des Ordonnées du cours direct, & l'autre à la suite des Ordonnées du cours rebroussant. Il est évident que cette idée ne s'appliqueroit pas aux Inflexions, quoique d'ailleurs les Inflexions & les Rebroussemens ayent coutume d'aller ensemble, & de suivre les mêmes loix dans les Théories qui les regardent. Les Ordonnées de l'arc concave, & celles de l'arc convexe ne font que la même suite d'Ordonnées, & par conséquent l'Abscisse d'un point d'Inflexion n'est qu'une Abscisse simple. Celle d'un point de Rebroussement double seroit triple, &c.

On sous-entend assez, que les Abscisses doubles,

bles, triples, &c. ou qui auront 2, 3, &c. valeurs égales, auront aussi-bien que les Ordonnées le même signe: sans cela toutes les Abscisses, quoiqu'égales, ne seroient pas la même, puisqu'elles ne seroient pas toutes posées de même côté par rapport à l'origine de l'Axe.

L'Abscisse auroit pu être Ordonnée, & l'Ordonnée Abscisse: aussi les Géometres appellent-ils *Coordonnées* ces deux lignes prises ensemble, & il est arbitraire de donner à l'une ou à l'autre l'une des deux dénominations. Par conséquent une Abscisse, qui, comme on l'a vu, ne sera pas multiple parce qu'elle portera une Ordonnée multiple, le sera dans le cas où elle eût été multiple, si on l'eût prise pour Ordonnée, car elle n'a rien perdu de sa nature pour avoir reçu un autre nom. Ainsi lorsqu'une Abscisse est telle qu'étant prise pour Ordonnée elle eût été Tangente simple ou multiple de la Courbe, elle est Abscisse ou 2 fois ou un plus grand nombre de fois quelconque. Or on prend une Abscisse pour Ordonnée, lorsque par le point de la Courbe où se termine l'Ordonnée supposée on tire une droite parallele à l'axe, car cette parallele, qui a la même position que l'Ascisse, en a les proprietés, & représente parfaitement l'Abscisse.

Non seulement une droite est susceptible de l'idée de multiplicité selon les sens que nous avons expliqués, mais un point en est susceptible aussi; non pas un point qui seroit un Elément de Courbe, car ce seroit une vraye droite, quoiqu'infiniment petite; mais un

un point mathématique, & abſolu. Une Courbe étant décrite ſur un plan, autant de fois qu'elle paſſe par un même point mathématique de ce plan, autant de fois ce point eſt multiple. Le point d'interſection de 2 branches, de 3 branches, &c. eſt un point double, triple, &c.

Un point d'attouchement, un point d'inflexion quelconques, ne ſont point des points multiples, puiſque la Courbe ne paſſe point pluſieurs fois par un même point du plan, & qu'au contraire elle s'étend toujours d'un point à un autre contigu. Mais par la même raiſon un point de rebrouſſement ſimple eſt un point double, car on conçoit naturellement que la Courbe arrivée au dernier point de ſon cours direct repart de ce même point pour commencer ſon cours rebrouſſant. Il eſt vrai que ſelon l'idée que nous avons priſe des Rebrouſſemens, & de toute la formation des Courbes, ce point n'eſt pas mathématique; ce ſont deux droites infiniment petites exactement poſées l'une ſur l'autre, & c'eſt par une étendue infiniment petite du plan que la Courbe paſſe deux fois. Mais pourvu, ce qu'il faut bien obſerver, que l'on n'ait point d'égard à la poſition de cette petite étendue par rapport à quelque autre droite, elle ne ſera plus qu'un point mathématique.

Il y a une autre eſpece de points beaucoup plus ſinguliere. Ces Ovales conjuguées, dont nous avons parlé, deviennent quelquefois infiniment petites; l'Equation de la Courbe permet qu'on égale à Zéro, ou qu'on anéantiſſe les grandeurs dont elles dépendent; elles

les sont alors des points qui ne tiennent à aucune des parties de la Courbe, des points absolument invisibles aux yeux, si ce n'est aux yeux Géometres: mais quelle sorte de points seront-elles? Si je veux concevoir un Cercle infiniment petit, je conçois son diametre infiniment petit du 1[er] ordre, sa circonference de ce même ordre, & un peu plus que triple ; il n'y a point là de point multiple, ni rien qui y ressemble.

Mais je puis concevoir la chose tout autrement. L'Ovale conjugée ou le Cercle, car cela revient au même, n'avoit que sa place déterminée sur le plan de la Courbe, mais non aucune position par rapport à un Axe, ce Cercle n'étoit ni parallele, ni perpendiculaire, ni oblique à un Axe, mais tout cela à la fois dans ses differentes parties ; & parce qu'il avoit toutes les positions, il n'en avoit cucune. Je ne dois donc le concevoir réduit à aucune grandeur infiniment petite d'aucun ordre, mais au seul point mathématique, qui étoit son centre. D'un autre côté, il faut que ce Cercle si réduit conserve quelque trace de ce qu'il étoit, mais la moindre qu'il se puisse; & je ne puis lui en imaginer une moindre qu'en concevant que deux de ces diametres, qui se coupoient à angles droits, si l'on veut, ont décru jusqu'à n'avoir plus que le point central où ils se coupoient. Ces deux diametres conservent au Cercle l'idée de ce qu'il a été Cercle, & comme ils ne sont plus que le point d'intersection de deux lignes, c'est un point mathématique double. Il est évident que ce sera la même chose pour

une Ovale, ou Courbe fermée quelconque.

En effet, si ce point-là n'étoit pas double, il ne seroit pas triple, car pourquoi triple plutôt que quadruple? pourquoi quadruple plutôt que quintuple, &c. Il seroit donc multiple d'une multiplicité infinie, ce qui est absurde.

Les Ovales adhérentes peuvent aussi-bien que les conjuguées devenir infiniment petites. Alors elles sont aussi des points doubles, parce qu'elles étoient Ovales: mais parce qu'elles étoient adhérentes il reste nécessairement un point de la Courbe pour l'adhérence, & par conséquent le point total est triple. M. l'Abbé de Bragelongne est le premier qui ait découvert & examiné ces sortes de points.

Ainsi des Ovales devenues infiniment petites, les premieres sont des points qui sont sur le plan de la Courbe, mais sans appartenir à aucune de ses branches, sans faire partie d'aucun de ses contours; les secondes sont des points qui font partie de quelqu'un de ses contours, de quelqu'une de ses branches, mais sans paroitre en faire autrement partie que tous leurs autres points. Des premieres proviennent des points multiples absolument invisibles aux yeux, & des secondes des points multiples dont la multiplicité n'est qu'en partie invisible.

Les points multiples de la 1re espece, qui n'appartiennent à aucune partie de la Courbe, lui appartiennent pourtant réellement, & de telle sorte qu'ils ont leurs Abscisses & leurs Ordonnées; à plus forte raison, ceux de la 2de espece. De plus, une droite tirée par

quel-

quelqu'un de ces points est censée avoir rencontré la Courbe dans le nombre de points désigné par la multiplicité du point multiple, & elle ne peut plus la rencontrer que dans le nombre de points permis par l'Equation de la Courbe, ce qui marque bien combien ils en font essentiellement partie. Cela sera vrai encore à plus forte raison des points multiples d'Intersection ou de Rebroussement, & il suffira de le faire voir des points multiples provenus des Ovales.

Une droite qui a passé par un point mathématique, car ceux dont il s'agit en sont, peut encore passer par tel autre point qu'on voudra. Ainsi celle qui a passé par un point double invisible, peut encore couper la Courbe au moins en un point simple, ce qui en fait trois; & par conséquent une Section Conique ne pouvant être rencontrée par une droite qu'en 2 points, il ne peut y avoir de points doubles dans ce 2^d^ ordre des Lignes, ils ne peuvent commencer à paroitre que dans le 3me, où il est clair qu'il ne peut y avoir que celui qui sera provenu d'une Ovale conjuguée. La droite qui aura passé par ce point, ne peut être que Sécante en un autre.

Dans le 4me ordre il ne peut y avoir de point plus que triple; car il doit rester à la droite qui y auroit passé, encore un point de la Courbe où elle seroit Sécante. Puisque nous ne parlons ici que de points multiples provenus d'Ovales, celui-ci viendra d'une Ovale adhérente. Sans doute il peut y avoir dans cet ordre des points doubles. La droite qui passera par un de ces points, peut encore

core être Sécante de la Courbe en 2 points, ou Tangente en 1; elle peut même passer encore par un autre point double, après quoi elle ne pourra plus du tout rencontrer la Courbe. Il peut donc y avoir au moins deux points doubles dans une Courbe de cet ordre, car ce que nous venons de dire ne prouve pas qu'il ne puisse y en avoir trois, qui ne pourroient être tous trois sur une même droite.

La multiplicité des points provenus d'Ovales peut augmenter par leur complication avec d'autres points multiples, qui seront provenus d'Intersections ou de Rebroussemens. Un point double provenu d'une Ovale conjuguée ne peut par ce moyen devenir plus multiple, parce que l'Ovale génératrice, pour ainsi dire, ayant été détachée de tout le reste de la Courbe, rien de tout ce qui forme cette Courbe ne passera par ce point.

Mais un point triple provenu d'une Ovale adhérente peut devenir plus que triple dans un ordre supérieur au 4me, parce que l'Ovale adhérente l'aura été à plus d'une branche de la Courbe, &, si l'on veut, à un point de Rebroussement, même multiple.

Les points multiples provenus d'Ovales ont une place déterminée sur le plan de la Courbe, & par conséquent une Abscisse & une Ordonnée, qui font chacune leur fonction autant de fois que le point est multiple, 2 fois si le point est provenu d'une Ovale conjuguée, 3 fois s'il l'est d'une Ovale adhérente; ce qui n'empêche pas que dans ce 2d cas le point ne puisse encore être multiple d'ailleurs, comme il vient d'être dit.

Mais

Mais il faut se souvenir que ces points, précisément entant que provenus d'Ovales, sont des points mathématiques, qui n'ont aucune position ; & par conséquent on ne peut dire que l'Ordonnée d'un point double lui soit parallele, ou perpendiculaire, ni pareillement son Abscisse, ou la parallele à l'axe. Elles ne peuvent toutes les deux être traitées que de Sécantes en ces points, & jamais de Tangentes. Si le point est triple, l'Ordonnée ou l'Abscisse y pourront être Tangentes seulement, parce qu'elles le seront à la branche qui passe par ce point, & le rend triple ; on jugera assez par-là des points qui seroient plus que triples.

Il est évident que puisque ces points sont multiples, leurs Abscisses & leurs Ordonnées le sont aussi, & de la même multiplicité.

Toutes ces idées fondamentales, & en quelque sorte métaphysiques, étant établies, il faut voir maintenant comment le Calcul géometrique s'y prend à démêler dans les Courbes du 4me ordre, dont il s'agit ici, les affections, qui peuvent naître de ces principes. Comme M. l'Abbé de Bragelongne ne traite encore entre ces Courbes que celles qui ont des points multiples, c'est là que doit tendre toute notre recherche, qui ne sera elle-même qu'une espece de Théorie du Calcul.

L'Equation de la Courbe étant donnée, c'est de la combinaison des Abscisses & des Ordonnées, du different jeu de cette combinaison, que l'on doit tout tirer.

L'Abscisse étant simple, l'Ordonnée est com-

communément simple; alors l'Ordonnée, & la parallele à l'axe terminée à cette Ordonnée, sont Sécantes de la Courbe.

L'Abscisse étant simple, l'Ordonnée peut être multiple, ou avoir plusieurs valeurs. Si toutes ces valeurs sont inégales, elle sera Sécante de la Courbe en autant de points; si elles sont égales, elle sera ou simple Tangente, ce qui la rendra double, ou Tangente à un point d'inflexion quelconque, ce qui la rendra multiple selon la multiplicité de ce point, triple pour une inflexion simple & visible, quadruple pour l'inflexion invisible, &c. S'il y a des valeurs inégales, & d'autres égales, il est aisé de voir ce qui en arrivera.

L'Abscisse multiple ne peut avoir que des valeurs égales, car ce n'est jamais qu'une même Abscisse que l'on considere, prise sur une certaine étendue de l'axe.

L'Ordonnée étant simple, l'Abscisse peut être multiple, & alors l'Ordonnée n'est Sécante de la Courbe qu'en un point, & la parallele à l'axe en est une Tangente autant de fois multiple que l'Abscisse a de valeurs, c'est-à-dire, simple Tangente à un point d'inflexion quelconque; car il ne peut pas y avoir là un point de rebroussement, qui empêcheroit l'Ordonnée d'être simple selon la supposition.

Si l'Abscisse & l'Ordonnée sont doubles, l'Ordonnée se termine à un point double, qui sera ou un point d'intersection de deux branches, ou un point de rebroussement, ou un point provenu d'une Ovale conjuguée. L'Abscisse est double dans ces cas, & ne

l'est

l'eſt avec l'Ordonnée qu'en ces cas.

Si l'Abſciſſe & l'Ordonnée ſont triples, l'Ordonnée ſe terminera à un point triple qui ſera ou un point d'interſection de trois branches, ou un point de double rebrouſſement, ou un point provenu d'une Ovale adhérente.

En général, l'égalité de multiplicité de l'Abſciſſe & de l'Ordonnée ſignifiera toujours ces trois cas indéterminément, c'eſt-à-dire, qu'il y aura un point multiple de l'une des trois eſpèces.

Si l'Abſciſſe & l'Ordonnée toutes deux multiples ne le ſont pas également, le cas des trois points multiples indéterminément marqués, qui étoit *pur*, & ne ſignifioit rien de plus, devient *mixte*, & ſignifie qu'outre un point multiple, il y a là un attouchement ſimple ou multiple. Cet attouchement appartient à celle des deux grandeurs, Abſciſſe, ou Ordonnée, dont la multiplicité excede l'autre. Ainſi ſi l'Abſciſſe eſt double, & l'Ordonnée triple, il y a là un point double, parce que l'Abſciſſe & l'Ordonnée ſont doubles toutes deux : mais parce que l'Ordonnée a un degré de multiplicité de plus, il faut qu'en ſe terminant à ce même point double, elle ſoit Tangente d'une branche de la Courbe. Si c'étoit l'Abſciſſe qui eût cet excès de multiplicité, ce ſeroit la parallele à l'axe qui ſeroit Tangente. Si l'excès de multiplicité eſt de 2 degrés, la Tangente le ſera à un point d'inflexion, &c.

Dans le 4me ordre des Lignes où un point multiple ne peut être plus que triple, & l'Abſciſſe ou l'Ordonnée plus que quadruple, il

il eſt facile de voir ce qui réſultera des differentes combinaiſons de l'une & de l'autre. Le cas le plus compliqué ſera celui de l'Abſciſſe triple, & de l'Ordonnée quadruple. Il y aura là un point triple, & l'Ordonnée qui s'y terminera ſera Tangente d'une branche. On pourroit prendre pour un cas auſſi compliqué celui de l'Abſciſſe double, & de l'Ordonnée quadruple, parce que le point double ſera accompagné d'une inflexion ordinaire & viſible.

Les points multiples, que nous trouvons dans toute cette recherche, demeurent encore indéterminés entre trois eſpeces, & il faut enſuite déterminer à laquelle ils appartiennent. Juſqu'ici le Calcul de l'Algebre commune a opéré, & a ſuffi. L'Equation de la Courbe contenoit le rapport général & invariable des Abſciſſes & des Ordonnées exprimées par des grandeurs indéterminées & variables; on a déterminé une Abſciſſe arbitrairement, quoique le plus ſouvent il vaille mieux y apporter un certain choix; & en mettant cette grandeur connue dans l'Equation de la Courbe à la place de l'Indéterminée ou Inconnue qui repréſentoit les Abſciſſes, on a une nouvelle Equation, où il ne reſte que l'Indéterminée ou Inconnue des Ordonnées, qui répondent à l'Abſciſſe ſuppoſée. Ces deux Equations ont chacune autant de racines, ou valeurs, ſoit réelles, ſoit imaginaires, qu'il y a d'unités dans leur plus haut Expoſant; & c'eſt-là ce qui donne la multiplicité des Abſciſſes & des Ordonnées, que l'on n'a plus qu'à comparer, & dont nous

 avons

avons fait voir les conséquences. Quand on est arrivé par-là à reconnoitre qu'il y a des points multiples de l'une des trois especes, le Calcul Algébrique ordinaire qui donne les valeurs égales, tant de l'Abscisse que de l'Ordonnée, ne va pas plus loin: mais parce que malgré cette égalité, qui jusque-là confond les trois especes, les Tangentes ou Soutangentes des differens points multiples sont differentes, il faut, pour lever l'indétermination, prendre le Calcul des Tangentes, qui est differentiel, & transcendant.

Quand le point multiple est formé par l'intersection de plusieurs branches, autant qu'il y a de branches, autant il y a de Tangentes à la Courbe en ce même point qui sont inégales; ou s'il y en a d'égales, affectées de differens Signes.

Quand le point est un point de rebroussement, toutes les Tangentes sont égales.

Quand le point est provenu d'une Ovale conjuguée, il a deux Tangentes égales, mais imaginaires parce que c'est un point mathématique, qui n'a point de position, & par conséquent point de Tangente, qui détermine toujours une position. Si le point est provenu d'une Ovale adhérente, il a deux Tangentes imaginaires, & une réelle à cause de la branche à laquelle il est adhérent. C'est proprement la Tangente de cette branche. On voit combien cela s'accorde avec un principe d'Algebre, que les racines imaginaires vont toujours deux à deux.

Voilà donc les trois especes de points multiples bien distinguées pour le Calcul. Comme

me la Soutangente d'un point simple d'une Courbe se trouve par une 1re Differentiation de l'Abscisse & de l'Ordonnée, ou, ce qui est le même, par le rapport de l'Infiniment petit de l'Abscisse à celui de l'Ordonnée, la Soutangente d'un point double se trouvera par une 2de Differentiation, celle d'un point triple par une 3me, &c. & l'Equation qui vient de la Differentiation convenable à la multiplicité de chaque point, renferme toutes les valeurs réelles ou imaginaires des Soutangentes, qui détermineront l'espece de chacun.

M. l'Abbé de Bragelongne applique toute sa Théorie des points doubles à un grand nombre de Lignes du 4me ordre, qui ont été presque toutes inconnues jusqu'à présent. Il finit par un Théorême curieux. Une ligne du 3me ordre ne peut avoir qu'un point double, une ligne du 4me n'en peut avoir qu'un triple, & en ce cas elle n'en aura point de double; mais une autre ligne du même ordre, qui n'aura point de point triple, pourra en avoir un ou plusieurs doubles. Si une ligne du 5me ordre, qui pourroit avoir un point quadruple, ne l'a pas, elle en pourra avoir de doubles, & en plus grand nombre, que si elle n'étoit que du 4me ordre; & ainsi de suite. Il s'agit de savoir seulement pour les points doubles, qui se trouveront dans tous les ordres, combien il s'en trouvera au plus dans chacun. M. l'Abbé de Bragelongne démontre que le nombre des points doubles étant 1 pour le 3me ordre, il sera 3 pour le 4me, 6 pour le 5me, 10 pour le 6me, 15 pour le 7me, & toujours ainsi selon la suite des Nombres Triangulai-

res.

res. Le fait est bien prouvé : mais quel rapport ces Nombres Triangulaires ont-ils, plutôt qu'une infinité d'autres, aux points doubles des differens ordres de Courbes? On trouve assez souvent en Géométrie de ces sortes de marches règlées, sans qu'on apperçoive la nécessité précise de leur règle particuliere. Cela vient en général de ce qu'on en a toujours mis quelqu'une dans le sujet que l'on considere; on la connoit, puisqu'on l'a établie soi-même : mais celle-là en produit d'autres imprévues, qui y étoient renfermées sans que nous le sussions, & sans que nous sachions même comment elles y étoient, après les en avoir vu sortir.

SUR LES COURBES TAUTOCHRONES *.

LA Cycloïde est fort fameuse chez les Géometres, principalement par son isochronisme. On sait que cette Courbe étant posée verticalement & renversée de sorte que ce qui étoit son sommet soit son point le plus bas, un Corps qui tombera le long de sa concavité jusqu'à ce sommet, tombera toujours en des tems égaux, soit qu'il ait commencé à tomber d'un point plus ou moins élevé. Cette proprieté suppose que le corps tombe dans le Vuide, ou dans un Milieu qui ne lui fasse aucune résistance; & comme l'Air n'en fait qu'une insensible, du moins dans des chutes de peu de hauteur, on n'a point eu besoin pour la pratique de chercher d'autres Courbes qui rendissent égaux les tems des chutes inégales. Mais

* V. les M. p. 109.

Mais ce qui ne feroit pas néceſſaire pour la pratique, l'eſt pour la Théorie, ſur-tout pour celle qui cherche des difficultés à vaincre, & M. Bernoulli en a trouvé une occaſion heureuſe dans l'entrepriſe d'étendre l'iſochroniſme, ou pour nous ſervir comme lui d'une expreſſion équivalente, le *tautochroniſme* de la Cycloïde à d'autres Courbes parcourues dans des Milieux réſiſtans. Il ne les ſuppoſe réſiſtans que ſelon les quarrés de la vîteſſe du Corps tombant, hypotheſe la plus vraiſemblable, la plus communément reçue, & peut-être la ſeule qui rende poſſible la ſolution du Problême, tant il eſt difficile. Il ne tiendra qu'aux Géometres d'éprouver combien il l'eſt encore dans cette hypotheſe-là même, & il faudra être habile pour le bien ſentir. Cette raiſon nous empêche abſolument de pouvoir donner aucune idée des fineſſes & des ſubtilités du Calcul de M. Bernoulli, & nous ſommes obligés de nous contenter de quelques vues générales, & plus communes.

Un axe vertical, qui ſe termine au point le plus bas, ou ſommet de la Cycloïde renverſée, étant poſé, & diviſé en une infinité de parties infiniment petites égales, d'où partent les Ordonnées de la Cycloïde, j'appelle *inſtans* les tems infiniment petits pendant leſquels ſont parcourus chacun des petits côtés de la Courbe, correſpondans à une diviſion de l'axe. A la fin de chaque inſtant le Corps tombant a une certaine vîteſſe, toujours plus grande d'inſtant en inſtant, & la même que s'il fût tombé juſque-là le long de la ligne droite ver-

verticale, car il ne tire l'accélération de sa vîtesse que de ce qu'il y a de vertical dans son mouvement, & nullement de ce qu'il y a d'horizontal. Quoique la vîtesse par laquelle il parcourt pendant chaque instant un petit côté de la Cycloïde soit la même que celle par laquelle il eût parcouru la partie droite verticale correspondante, cela n'empêche pas que l'instant par la Cycloïde ne soit plus long, parce que tous les petits côtés de la Cycloïde étant inclinés à l'Horizon, excepté le premier & plus élevé, ils sont plus grands que les petites droites verticales correspondantes, & ne peuvent être parcourus qu'en plus de tems. Si dans une 1re chute le corps est tombé du point le plus élevé de la Cycloïde, & que dans une 2de chute il ne soit tombé que de son point du milieu, j'entends par-là celui qui répond au point du milieu de l'axe vertical, il est visible que la somme des instans de la 1re chute est deux fois plus forte par le nombre que celle des instans de la 2de, & que de ce chef les tems totaux des deux chutes sont bien éloignés de l'égalité; mais les instans de la 2de chute ont été plus longs par deux raisons, 1°. parce que cette chute n'ayant pas commencé de si haut, la vîtesse n'y a jamais été si grande que dans la 1re, 2°. parce que les côtés de la Courbe ont été plus inclinés dans sa 2de moitié. Il est donc possible que les deux sommes d'instans malgré leur premiere inégalité se retrouvent égales, & ces deux chutes seront tautochrones. Mais afin que la Courbe porte ce nom, il faut qu'elles le soient toutes, de quelque

 point

point qu'elles commencent pour aller se terminer au point le plus bas

Alors, comme il y a toujours un certain nombre de côtés de la Courbe communs à une chute quelconque & à une plus basse, il faut que ces côtés communs, les seuls qui seront parcourus par la chute basse, soient de telle grandeur qu'ils allongent les instans de la quantité nécessaire, & que quand dans la chute élevée ils seront parcourus après des côtés supérieurs, & par conséquent avec plus de vîtesse, ils n'allongent plus les instans qu'autant qu'il faudra. Or leur grandeur dépend de leur position par rapport à l'Horizon, & le tout ensemble de leur position mutuelle ou respective, qui est ce qui fait la nature ou l'essence de la Courbe. Voilà d'où nait la Cycloïde dans un milieu non résistant, seule Courbe tautochrone connue jusqu'ici.

Mais si l'on considere la résistance du Milieu, uniforme en elle-même, parce que le Milieu sera également dense en toutes ses parties, & cependant croissante parce que la vîtesse du Corps, qui pénétre le Milieu, croît toujours, & croissante selon les quarrés de cette vîtesse, alors il faut faire de nouvelles considerations pour trouver une Courbe tautochrone. La résistance allonge le tems total de la chute, & tous les instans qui le composent, puisqu'elle retranche toujours quelque portion de la vîtesse que produisoit ce qu'il y avoit de vertical dans la chute de quelque instant. Ce ne sont point les quarrés de la vîtesse primitive, produite par le vertical de la chute, ce sont les quarrés de

la

la vîtesse diminuée de chaque instant, auxquels la résistance se proportionne. Or cette vîtesse diminuée l'est d'autant plus que la force absolue de la résistance est plus grande, & au contraire ; & par conséquent les instans sont allongés selon une certaine raison, dans laquelle doit entrer, outre le quarré de chaque vîtesse, la force absolue de la résistance du Milieu. Cette force étant differente pour chaque Milieu, le tems total de la chute & les instans seront donc aussi differemment allongés ; & comme les côtés d'une Tautochrone doivent être, & chacun en particulier & tous par rapport les uns aux autres, posés de la maniere que demande la durée des instans, il y aura dans la seule hypothese de la résistance du Milieu proportionnée aux quarrés de la vîtesse croissante, autant de differentes Tautochrones que de differentes résistances absolues possibles pour differens Milieux, c'est-à-dire, qu'il y aura une infinité de Tautochrones, au-lieu que la Cycloïde étoit unique pour le Vuide.

M. Bernoulli comprend toutes les Tautochrones de son hypothese dans une Equation générale, où entrent l'infiniment petit d'un Arc quelconque, celui de l'Abscisse correspondante, & deux Indéterminées constantes, dont l'une est la résistance absolue du Milieu, & l'autre a rapport au tems total de la chute, le tout combiné avec l'Arc quelconque, & l'Abscisse.

Si dans cette Equation on suppose la résistance du Milieu nulle, on voit renaitre aussitôt la Cycloïde. On ne peut pas supposer

cette résistance infinie, il n'y auroit point de chute.

Si on suppose le tems total infini, car on ne peut pas le supposer nul, la Tautochrone devient la Tractrice, dont nous avons parlé assez au long en 1711 *. Cette Courbe a une Asymptote, & par conséquent un cours infini, & son point le plus élevé est infiniment éloigné du plus bas. Qu'un Corps, en suivant la concavité de la Tractrice, tombe ou de ce point le plus élevé, ou de celui qui sera, par exemple, à la moitié de l'étendue de la Courbe, ou au tiers, &c. jusqu'au point le plus bas, il tombera toujours dans le même tems infini, parce qu'à proportion qu'il tombera d'un point moins élevé, & acquerra par conséquent moins de vîtesse, la résistance du Milieu diminuera moins aussi son mouvement. Que si le Corps ne tomboit que d'un point de la Courbe finiment éloigné du point le plus bas, sa chute demanderoit encore le même tems infini, ce qui est nécessaire pour le Tautochronisme, & paroît cependant un violent paradoxe. Mais on l'expliquera aisément en prenant les idées exposées dans la *Géométrie de l'Infini* sur les Courbes qui ont des Asymptotes. La portion finie de la Tractrice que le Corps auroit à parcourir dans le cas présent, seroit nécessairement selon ces idées presque absolument parallele à l'Horizon, & telle que la pesanteur du Corps ne pourroit lui en faire parcourir une partie infiniment petite qu'en un tems

* p. 75. & suiv.

tems fini, & par conféquent le tout en un tems infini, que la pofition particuliere des petits côtés de la Courbe rendroit égal aux autres tems infinis déja trouvés.

Il eft bon de remarquer, que comme la Cycloïde eft la feule Tautochrone du Vuide, la Tractrice eft la feule Tautochrone du tems infini, & la feule par conféquent d'une étendue infinie.

Quand un Corps tombe dans un Milieu réfiftant, il reçoit des accroiffemens continuels de vîteffe par la continuation de fa chute felon ce qu'elle a de vertical, & en même tems des décroiffemens continuels à cette même vîteffe par la réfiftance du Milieu. Les accroiffemens font toujours égaux à chaque inftant felon le fyftême de la Pefanteur, & les décroiffemens au contraire toujours plus grands, à caufe que la réfiftance croît dans la raifon des quarrés des vîteffes. Les accroiffemens plus grands d'abord que les décroiffemens, parce que les quarrés de la vîteffe font fort petits, ne font donc plus grands que de moins en moins, ce qui amene néceffairement les uns & les autres à l'égalité, après quoi les décroiffemens font les plus grands. Il y aura dans la Courbe parcourue un point de la plus grande vîteffe du Corps.

Qu'après ce point le Corps continue de tomber jufqu'au point le plus bas de cette Courbe, cela n'a rien qui la doive empêcher d'être tautochrone; ce point de la plus grande vîteffe baiffera toujours à mefure que le Corps tombera d'une moindre hauteur jufqu'au point le plus bas qui eft fixe; & la vî-

vîtesse, plus diminuée par la résistance du Milieu qu'augmentée par l'action continuelle de la pesanteur, sera dans le même cas que si elle n'étoit diminuée que par la position des côtés de la Courbe, ce qui non seulement n'est pas contraire au tautochronisme, mais y est nécessaire.

Nous n'avons consideré jusqu'à présent qu'une partie du Problême résolu par M. Bernoulli, les descentes tautochrones d'un Corps; il faut de plus pour le parfait Tautochronisme que ce Corps arrivé au point le plus bas remonte en vertu de sa vîtesse jusqu'à une certaine hauteur par une seconde branche de la Courbe, & cela en un tems égal à celui d'une descente quelconque. L'Equation générale de M. Bernoulli renferme ces deux conditions ensemble, au moyen d'un simple changement du Signe de quelques termes.

Dans la Cycloïde le Corps arrivé au point le plus bas avec une vîtesse entiere, & qui n'a essuyé aucune résistance, remonte à la même hauteur d'où il étoit descendu, en un tems égal, & par une seconde branche de la Courbe égale & semblable à la premiere; ce qu'on voit évidemment qui doit être, à cause de la parfaite égalité de tout de part & d'autre. Mais il n'en est pas de même dans une Tautochrone, où se trouve un point de la plus grande vîtesse, qui n'est pas, comme dans la Cycloïde, son point le plus bas. Ce Corps ne peut remonter qu'avec cette vîtesse diminuée qu'il a au dernier point ou instant de sa descente, par conséquent il ne peut remonter à une aussi grande hauteur que cel-
le

le d'où il est descendu; & comme il faut qu'il remonte en un tems égal à celui de la descente, il faut que l'Arc remonté ait par rapport à l'Horizon l'obliquité nécessaire pour employer tout ce tems-là: d'où il suit que les deux branches de la Courbe, l'une descendue, l'autre remontée, ne seront ni égales, ni semblables; seulement la branche descendue, prise depuis l'origine de la chute jusqu'au point de la plus grande vîtesse, sera égale, mais non semblable, à la branche remontée, ainsi que M. Bernoulli le démontre.

Nous avons dit d'après feu M. Varignon en 1708 *, & 1709 †, qu'un Corps qui tomberoit en ligne droite dans un Milieu dont la résistance suivroit ou la raison simple des vîtesses, ou celle de leurs quarrés, n'acquerroit dans l'un & l'autre cas au bout d'un tems infini qu'une vîtesse finie, mais beaucoup moindre dans le second cas. Si l'on applique cette proposition à la Tractrice qui est la Tautochrone d'un tems infini dans un Milieu résistant selon la raison des quarrés, le Corps qui parcourt la Tractrice aura une vîtesse finie au bout d'un tems & d'un cours infini. Il arrivera en un tems fini au point de sa plus grande vîtesse, car il faudroit que la résistance du Milieu fût infiniment petite ou foible, pour ne pouvoir qu'au bout d'un tems infini diminuer plus la vîtesse que la pesanteur ne l'augmente continuellement. Du point de la plus grande vîtesse au point le plus bas, il y

* p. 151. & suiv. † p. 122. & suiv.

y aura donc une diſtance infinie. La Courbe aura une ſeconde branche égale à la portion de la premiere déterminée par la plus grande vîteſſe, & par conſéquent finie, & preſque entierement horizontale pour ne pouvoir être parcourue, ainſi qu'il a été dit, qu'en un tems infini.

La Cycloïde & la Tractrice ſont les deux Tautochrones extrêmes & les plus oppoſées. Elles le ſont parfaitement ſur la poſition du point de la plus grande vîteſſe dans la premiere branche; il eſt dans la Cycloïde à l'extrémité de cette branche, puiſqu'il eſt le même que le point le plus bas; & dans la Tractrice il eſt infiniment éloigné du point le plus bas: d'où il ſuit par analogie, que dans toutes les Tautochrones moyennes le point de la plus grande vîteſſe ne ſe confondra jamais avec le point le plus bas, & en ſera toujours à une diſtance finie.

Il ſuit encore, que puiſque la Cycloïde a ſes deux branches égales & ſemblables, & que la Tractrice les a infiniment inégales & diſſemblables, les Tautochrones moyennes les auront d'autant moins inégales & diſſemblables qu'elles approcheront plus de la Cycloïde, & au contraire. Or elles approcheront d'autant plus de la Cycloïde que les Milieux ſeront moins réſiſtans, & d'autant plus de la Tractrice qu'elles auront beſoin pour être Tautochrones d'être parcourues en un tems plus long.

Nous ne diſons rien des differens Problêmes réſolus par M. Bernoulli ſur la détermination du point de la plus grande vîteſſe, ſur

la

la comparaison des differens Arcs de la Courbe, sur les constructions, &c. Non-content des difficultés naturelles du sujet, quoique très embarrassantes, il y en a même fait entrer d'étrangeres. On reconnoitra par-tout une extrême adresse, soit à éviter des labyrinthes de Calcul, soit à se démêler de ceux qui étoient inévitables.

SUR LA COURBE AUX APPROCHES EGALES *.

LEs Courbes Tautochrones sont telles, parce que le Corps tombe toujours en un tems égal, soit qu'il tombe d'un point plus ou moins élevé; & il est visible qu'en ce tems égal il ne s'est pas également approché du point le plus bas de la Courbe, ou, ce qui est le même, de l'Horizon, car certainement il s'en est d'autant plus approché qu'il est tombé de plus haut. M. Leibnits imagina de chercher une Courbe telle que le Corps qui la parcourroit, s'approchât toujours également de l'Horizon en un tems égal, par exemple, en une seconde. Il l'appella la Courbe *accessus æquabilis*, *aux approches égales*. Puisque dans une chute faite selon une droite verticale, la vîtesse augmenteroit toujours & feroit que dans un tems égal le Corps décriroit toujours une plus grande portion de cet-

* V. les M. p. 333.

cette verticale, & par conséquent s'approcheroit davantage de l'Horizon, il est nécessaire que la Courbe modere cette augmentation de vîtesse, & se dispose de façon que ce que la chute aura de vertical soit plus court, & ce qu'elle aura d'horizontal plus long, à mesure qu'elle avancera davantage vers son terme ; & cela selon une certaine raison précise, quoique changeante à chaque instant. Mrs. Leibnits, Bernoulli & Varignon, comme nous l'avons dit en 1699 *, ont trouvé que cette Courbe étoit une 2de Parabole cubique, posée de maniere que son point de rebroussement fût le plus élevé.

Mais quoique M. Varignon eût porté selon sa coutume ce Problême à une grande universalité, en y mettant de nouvelles conditions, les *approches*, par exemple, inégales en telle raison qu'on voudroit, il étoit demeuré renfermé à un autre égard dans des bornes très étroites ; les chutes se faisoient toujours dans le Vuide, ou dans un Milieu non résistant, ou, ce qui revient au même, dans un Milieu dont la résistance fût toujours uniforme, & indépendante de la vîtesse du Corps.

M. de Maupertuis a élevé ce Problême à l'universalité qui lui manquoit ; on trouvera toujours une Courbe aux approches égales, selon quelque puissance des vîtesses que les Milieux puissent résister. S'ils ne résistent point, c'est la 2de Parabole cubique déja trouvée ; & c'est encore elle, s'ils résistent selon
la

* p. 82. & suiv.

la raison simple des vîtesses, mais renversée, c'est-à-dire, s'ils résistent moins en même raison que la vîtesse devient plus grande. Cette hypothese ne paroît guere conforme à la Nature, mais enfin cela est analogue à ce que la Cycloïde, qui est la Tautochrone du Vuide, ou du Milieu non résistant, l'est aussi du Milieu qui ne résisteroit que selon la raison simple directe des vîtesses. Toutes les autres hypotheses de résistance des Milieux donnent des Courbes d'approches égales, fort differentes de la Parabole cubique. L'hypothese de la résistance proportionnelle aux quarrés des vîtesses suffiroit seule pour donner à M. de Maupertuis tout le plaisir qu'il a recherché dans des difficultés de Calcul, soit differentiel, soit intégral. Non-seulement il y a de ces Courbes que l'on ne construit, ou dont on ne peut avoir les Abscisses & les Ordonnées, que par des quadratures d'autres Courbes; mais encore ces autres Courbes se trouvent être des Exponentielles, c'est-à-dire, transcendantes par rapport à celles qu'on a nommées d'abord transcendantes par rapport aux Courbes algébriques.

CEtte année, M. de Cury, dont nous avons déja parlé en 1728 *, a lu à l'Académie un Mémoire qu'elle a approuvé, sur la Courbure des Courbes. *Les Elémens de la Géométrie de l'Infini* ont donné pour la détermi-

* p. 72.

mination de cette Courbure, une méthode géométrique, differente de la méthode ordinaire, qui procede par les Rayons des Dévelopées, Courbes étrangeres à celles que l'on examine. La nouvelle méthode prend la Courbure des Courbes en elles-mêmes, & la détermine par les Sinus des Angles de Contingence. Mais elle a le défaut d'être bornée aux Courbes dont les Ordonnées sont paralleles, les plus communes de toutes, à la vérité, & de beaucoup les plus communes, mais non pas les seules; il restoit celles dont les Ordonnées sont concourantes en un point. M. de Cury a trouvé le moyen de rendre la méthode de la *Géométrie de l'Infini* absolument générale, & telle que sur les mêmes principes on y trouve la courbure des deux especes de Courbes; elle est pour les Courbes à Ordonnées concourantes, & par un léger changement elle est pour les Courbes à Ordonnées paralleles. Il a donné des exemples de la 1re espece de Courbes, car il y en avoit assez de la 2de dans l'Ouvrage cité, sur la Spirale ordinaire de tous les degrés, & sur la Spirale Parabolique.

M. Clairaut, frere cadet de celui dont nous avons parlé en 1726 *, a lu aussi à l'Académie une Méthode qu'il a trouvée pour former tant de Triangles qu'on voudra, avec cette condition, que la somme des quarrés

* p. 61.

rés de deux côtés soit double, triple, quadruple, &c. du quarré de la base; & comme ce qui est dit des quarrés convient à toutes les figures semblables, il prend, au-lieu de quarrés, des Segmens de Cercles semblables, & découvre par-là les quadratures de quelques especes de Lunules. Il rend plus étendue & plus générale la Méthode de M. de l'Hôpital, pour quarrer quelque portion de la Lunule d'Hippocrate de Chio *, & il quarre encore quelques autres portions de la Lunule, par une méthode differente de celles de Mrs. Wallis, & Tschirnhaus. Il a 14 ans, & ce seroit bien assez qu'il entendît les découvertes de ces grands Géometres, sans y rien ajouter, & sans renchérir sur eux; mais on a déja vu que la Géométrie est extrêmement précoce dans cette Famille.

NOus renvoyons entierement aux Mémoires

† Deux Ecrits de M. Nicole sur quelques Questions qui regardent les Jeux.

‡ L'Ecrit de M. Mahieu sur de nouvelles proprietés de l'Hyperbole.

* V. l'Hist. de 1701. p. 98. & suiv.
† V. les M. p. 60. & 471. ‡ V. les M. p. 721.

ASTRONOMIE.

*SUR LA COMETE DE M. DCCXXIX. ET DE M. DCCXXX *.*

LA Comete dont nous avons parlé en 1729 †, qui n'a fait aucun bruit dans le monde, & n'a été connue que des Observateurs de profession, & apparemment même d'un petit nombre d'entre eux, est cependant une des plus remarquables & des plus singulieres dont on ait mémoire, & sur-tout des mieux conditionnées par rapport à l'établissement d'un systême général de ces grands Phénomenes.

Elle avoit commencé à paroitre, ou du moins à être apperçue le 31 Juillet 1729: nous en avons rendu compte jusqu'au 10 Nov. de la même année, & on l'a vue jusqu'au 21 Jan. 1730, encore ne la perdit-on qu'à cause du mauvais tems, & du clair de Lune; desorte qu'elle a été visible près de 6 mois, & auroit pu l'être davantage. Il y a plus de 100 ans qu'il n'a paru de Comete d'une si longue durée.

Elle a toujours été d'Orient en Occident, ou contre la suite des Signes, depuis sa premiere apparition jusqu'au 19 ou 20 Oct. après quoi elle a été d'Occident en Orient, c'est-à

* V. les M. p. 406. † p. 93. & suiv.

à-dire, qu'elle a été rétrograde & puis directe à la maniere des Planetes; & comme selon le calcul de M. Cassini elle avoit dû être en opposition avec le Soleil le 8 Août, tems où elle n'étoit pas encore observée à Paris, on a dû voir ici son mouvement rétrograde diminuer toujours, ainsi qu'auroit fait celui d'une Planete qui a passé l'opposition; & c'est en effet ce qu'on a vu. Il est naturel de supposer que le tems de sa premiere rétrogradation, c'est-à-dire, de celle qui a précédé l'opposition, ait été égal à celui de la seconde, & sur ce pied-là elle auroit commencé à être rétrogade dans les derniers jours de Mai 1729, & l'auroit été en tout près de 5 mois. C'étoit-là un tems bien suffisant pour son apparition totale, & s'il n'avoit pas été plus long, on auroit jugé qu'elle n'avoit qu'un mouvement d'Orient en Occident, qu'elle alloit donc contre la direction du Tourbillon Cartésien, & que cela étant impossible à la longue, ce Tourbillon n'existoit point. Il ne faut donc pas se presser de croire que les Tourbillons soient détruits par les mouvemens des Cometes, qui y sont opposés; & il y a au contraire une forte présomption, qu'ils se rétabliront parfaitement par l'explication de M. Cassini, que la Comete de cette année favorise à souhait.

En vertu de la rétrogradation & de la direction, qui a suivi, cette Comete a été vue dans le même lieu du Ciel en deux tems differens; ce qui est un avantage rare & considerable pour les déterminaisons astronomiques: mais nous ne pouvons que le faire entrevoir.

L'Or-

L'Orbe de la Terre autour du Soleil, quoiqu'il ait un diametre de 66 millions de lieues, est si petit par rapport à la distance des Fixes, qu'il peut n'être compté que pour un point, & que la Terre, qui lorsqu'elle est à l'extrémité d'un diametre, voit, par exemple, une Fixe au Zénit, l'y verra encore lorsqu'elle sera à l'autre extrémité; s'il y a une difference ou parallaxe, il sera bien difficile de l'appercevoir. Ainsi toutes les lignes, qui de la Terre placée en differens points de son Orbe iront à une même Etoile fixe, seront censées paralleles à cause de la distance presque infinie, & les arcs de l'Orbe compris entre deux paralleles consécutives, ou plutôt les cordes de ces arcs, seront les distances de ces paralleles entre elles, & les bases de triangles infiniment aigus, dont le sommet seroit infiniment éloigné. Si, outre l'Etoile supposée au Zénit, la Terre en regarde une autre de differens points de son Orbe, elle la verra encore par des lignes toutes paralleles entre elles, mais inclinées aux premieres, plus ou moins selon la position des deux Etoiles.

Si un autre Astre qu'une Fixe est vu au même point du Ciel par la Terre placée en deux differens points de son Orbe, ou, ce qui est le même, en deux differens tems, il est à cet égard dans le même cas qu'une Fixe, & il est vu par deux paralleles: mais si cet Astre se meut, comme fait certainement une Comete, il est impossible qu'il soit vu dans les deux tems par les deux paralleles, à moins qu'il ne se soit mû selon la même direction

que

que la Terre, qu'il aura ſuivie pour ſe retrouver à ſon égard dans la même poſition que s'il eût été fixe. Il n'importe quelle ligne il ait décrite entre les deux paralleles, courbe ou droite, perpendiculaire ou inclinée à ces paralleles; mais enfin pour paſſer de la premiere à la ſeconde, il faut puiſqu'il s'eſt mû, qu'il ſe ſoit mû du même ſens que la Terre, il n'y a que cette condition qui puiſſe faire l'effet de l'immobilité d'une Fixe. La Comete s'eſt donc mûe réellement d'Occident en Orient pendant tout l'intervalle compris entre les deux tems, où elle a été vue au même lieu du Ciel, c'eſt-à-dire, auſſi-bien pendant la rétrogradation que pendant la direction; & par-là M. Caſſini amene à la certitude géometrique ce qui n'étoit auparavant que très probable. C'eſt la Comete vue deux fois dans le même lieu du Ciel, qui a fondé la démonſtration.

Ces deux paralleles, par leſquelles la Comete a été vue au même lieu en deux obſervations differentes, ne peuvent déterminer ni quelle route la Comete a tenue entre elles, ce qui eſt clair, ni quelle eſt ſa diſtance à la Terre; car puiſqu'elles ſont paralleles elles ne font point d'angles, & à quelque diſtance très grande qu'on ſuppoſe la Comete, ce ſera toujours la même choſe. Mais ſi on prend une 3me obſervation, où la Comete aura été vue dans un autre lieu du Ciel, & que du point de l'Orbe de la Terre d'où cette obſervation aura été faite on tire une ligne à la Comete, cette ligne ſera néceſſairement inclinée aux deux paralleles, puiſque la Co-

mete

mete eſt vue dans un autre lieu, & l'inclinaiſon ſera d'autant plus grande, ou l'angle de la nouvelle ligne avec les deux premieres d'autant plus petit, que la diſtance de la Comete à la Terre ſera plus grande. Voilà le principe fondamental de la détermination de cette diſtance, qui demande pourtant encore aſſez de Géometrie & de calcul. Il faut ſe ſervir des diſtances connues de la Terre au Soleil dans les trois obſervations, prendre entre les lignes tirées de la Terre à la Comete d'autres lignes proportionnelles aux arcs décrits par la Terre ſur ſon Orbe d'une obſervation à l'autre, ou aux tems écoulés, &c. Enfin tout cela fait, M. Caſſini trouve la Comete entre Mars & Jupiter, comme il l'avoit déja avancé en 1729. Il ſeroit inutile d'avertir que ſi nous n'avons ſuppoſé ici que trois obſervations, ce n'a été qu'afin de réduire tout au plus ſimple: un Aſtronome qui en a un plus grand nombre, ne manque certainement pas de les employer, ſur-tout dans des déterminations très délicates & très épineuſes. M. Caſſini croit qu'en poſant la diſtance moyenne de ſa Comete au Soleil un peu plus de quatre fois plus grande dans les ſix mois qu'on l'a apperçue, que celle de la Terre, il approche preſque autant du vrai que l'on ait fait pour la diſtance d'aucune Planete. On n'a peut-être pas vu juſqu'à préſent de Comete dont la diſtance ſoit auſſi exactement trouvée.

La même méthode, qui fournit la diſtance par le moyen des trois obſervations ſuppoſées, fournit auſſi l'inclinaiſon, & par conſéquent

quent la longueur de la route de la Comete entre les deux paralleles & la 3me ligne inclinée, pourvu que cette route soit une ligne droite; & cette ligne qui se trouve nécessairement divisée en deux parties, donne par le rapport de ces parties celui du mouvement de la Comete entre les observations, pourvu que ce mouvement soit uniforme. Mais ni l'une ni l'autre de ces deux conditions ne se trouve dans la réalité; on peut cependant les supposer légitimement toutes deux, & dans une fort petite portion de l'Orbe de la Comete, & dans un tems fort court par rapport à celui de sa révolution entiere. Or on est toujours, ou bien on peut aisément se mettre dans l'un & l'autre de ces deux cas.

Cette méthode n'est donc bonne que pour trouver le mouvement de la Comete, qui a répondu à trois observations, par ex. peu éloignées. Si l'on en prenoit trois autres peu éloignées entre elles, mais éloignées des premieres, on trouveroit une autre quantité de mouvement, de même qu'en prenant la Comete dans des points de son cours éloignés, on lui trouvera differentes distances au Soleil & à la Terre.

Les distances de la Comete au Soleil & plus précisement à la Terre, font varier l'apparence de son mouvement; une plus grande proximité la rend plus grande, & au contraire: mais les distances au Soleil doivent faire varier le mouvement réel comme celui des Planetes, si les Cometes sont des Planetes Solaires; & il se trouve dans la Comete dont il s'agit, que la difference de son mouvement,

vu

vu en deux points éloignés de son cours, a été double de la difference de sa distance au Soleil dans ces mêmes points, ainsi qu'on le trouve précisément dans les Planetes les mieux connues. Une moitié de cette difference du mouvement observé n'étoit qu'apparente, & dûe à une distance, moindre, si l'on veut; l'autre moitié étoit réelle, & véritablement causée par cette distance, parce qu'elle étoit moindre.

Si la Comete dans le tems qu'elle a été visible a été 4 fois plus éloignée du Soleil que la Terre, & si l'on suppose que dans la Région du Ciel, ou dans la couche du Tourbillon Solaire où elle se trouvoit, elle ait pris la vîtesse qui selon la Règle de Kepler conviendroit à une Planete placée au même lieu, on verra sans peine que sa vîtesse réelle devoit être 2 fois moindre que celle de la Terre, car ces vîtesses réelles des Planetes sont en raison renversée des racines quarrées de leurs distances au Soleil; or ici la distance de la Terre étant 1, celle de la Comete est 4, dont la racine est 2. Si la Terre qui fait sur son Orbre un degré en 24 heures, avoit 2 fois moins de vîtesse, elle ne feroit que 30′, donc la Comete avec cette même vîtesse employée à parcourir un Orbe 4 fois plus grand que celui de la Terre ne doit faire en 24 heures que le quart de 30′, ou 7′ 30″.

Cependant M. Cassini par ses calculs trouve ce même mouvement de 9′ 40″, ce qui est trop different pour la précision dont l'Astronomie est aujourd'hui: mais ce qui rectifie & corrige cette difference, c'est qu'en suppo-

po-

posant que la Comete parcouroit une Ellipse, ainsi qu'il est nécessaire si c'étoit une Planete, il suit de cette figure qu'au tems de sa premiere apparition elle avoit un peu passé son Périhélie & alloit à une de ses moyennes distances, où par conséquent son mouvement, qui est alors véritablement le moyen, & réel, eut été moindre que 9′ 40″. En suivant l'idée de l'Ellipse M. Cassini détermine le mouvement dans l'Aphélie d'un peu moins de 4′, & de tout cela résulte pour tout l'Orbe le véritable mouvement moyen de 6′.

M. Cassini n'ose déterminer absolument l'espece de l'Ellipse que décrit la Comete, parce qu'il ne juge pas que dans les differentes observations ses distances au Soleil, qui seroient un fondement nécessaire, ayent pu être connues avec une assez grande précision. Il ne laisse pas néanmoins de croire qu'on représentera assez exactement son cours en supposant que sa moyenne distance au Soleil est à celle de la Terre comme 24 à 5. Il suit de-là que sa révolution entiere est d'environ 10 années selon la Règle de Kepler, à laquelle cette Comete se trouve merveilleusement conforme; ce qui est & une nouvelle gloire pour la Règle qui ne s'étendoit pas encore jusque-là, & une forte preuve que quelques Cometes tout au moins sont des Planetes Solaires.

L'inclinaison de l'Orbe de cette Comete sur le plan de l'Ecliptique est, selon les calculs de M. Cassini, de plus de 76 degrés, ce qui excede de beaucoup la plus grande inclinaison de toutes les Planetes connues, celle

le de Mercure, qui n'est que de 7 : mais il ne sera pas étonnant qu'une Comete, qui quoique Planete Solaire seroit toujours d'une condition differente des autres, s'en écarte beaucoup à quelques égards, qui ne changeroient rien à leur nature générale. Le Nœud de son Orbite avec l'Ecliptique a été entre le 10 & le 11me degré d'Aquarius.

Selon son mouvement & le tems de sa révolution déterminés par M. Cassini, elle a dû se retrouver en opposition avec le Soleil au mois de Sept. 1730, tems le plus favorable pour l'observer, si elle a pu l'être : mais elle ne l'a pu, apparemment parce qu'elle étoit alors trop éloignée de la Terre. Il ne faut pas s'attendre que tout s'accorde si promtement à donner un systême général des Cometes, ni même celui d'aucune Comete en particulier. Des Philosophes trop impatiens auroient à revenir sur leurs pas.

SUR UNE OBSERVATION

de l'Eclipse de Lune du 8 Août 1729, faite à la Nouvelle Orléans dans la Louisiane.

L'ECLIPSE totale de Lune du 8 Août 1729, dont les observations faites à Paris ont été rapportées dans les Mémoires de cette même année *, fut aussi observée à la Nouvelle Orléans dans la Louisiane par M. Ba-

* p. 487. & 489.

Baron, envoyé dans ce Païs-là par le Roi pour des recherches d'Hiſtoire-Naturelle & des Obſervations Aſtronomiques. Nous rendons particulierement compte de celle-ci, parce qu'elle ſervit à décider une difficulté qui s'étoit élevée dans l'Académie.

Le P. Laval, dans ſon voyage de la Louiſiane en 1720, avoit donné par ſes obſervations la difference de Longitude entre Paris & l'Iſle Dauphine, ſituée à l'embouchure de la Riviere de la Mobile, plus petite de 11 degrés que celle de la Carte d'Amérique de M. Deliſle, publiée en 1722. Le P. Laval ſe tenoit ſûr de l'exactitude de ſon obſervation, & ſon habileté n'étoit pas conteſtée; celle de M. Deliſle ne l'étoit pas non plus, & il étoit armé d'un grand nombre de raiſons très fortes, qu'il expoſa à l'Académie; & ils differoient tous deux à tel point, qu'on ne pouvoit les concilier en ſuppoſant que l'un ou l'autre ſeroit tombé dans quelque légere erreur.

Enfin le doute fut levé par l'Eclipſe dont il s'agit. Elle fut vue à Paris pendant toute ſa durée, & à la Nouvelle Orléans vers ſa fin ſeulement; & M. Caſſini ayant comparé les tems des Phaſes obſervées par lui & par M. Baron, ou s'étant ſervi de quelques autres obſervations faites en France, a trouvé qu'il en réſultoit entre les deux Lieux une difference de Méridiens aſſez conforme à celle que M. Deliſle avoit poſée.

Nous

NOus renvoyons entierement aux Mémoires

* L'Ecrit de M. Godin sur la solution d'un Problême, d'où l'on tire une Méthode nouvelle de déterminer les Nœuds des Planetes.

† L'Observation de M. Cassini de l'Eclipse Solaire du 15 Juillet.

GEOGRAPHIE.

M. BUACHE, employé à travailler au Dépôt des Cartes de la Marine établi en 1721, ayant profité pour l'avancement de la Géographie de tout ce qu'il avoit sous les yeux, apporta à l'Académie une Carte qu'il avoit dressée du Golphe de Mexique & des Isles de l'Amérique. Cette partie du Nouveau Monde est la plus fréquentée par les Navigateurs François, & les erreurs des Cartes en deviennent d'autant plus dangereuses. Celle de Pieter Goos, dont les Pilotes se servent ordinairement, se trouva par les recherches de M. Buache assez éloignée du vrai. Il rendoit sensible à l'œil par des contours d'une couleur differente, combien elle differoit de la nouvelle Carte. Celle-ci differoit mê-

* V. les M. p. 33. † V. les M. p. 643.

même assez considerablement de la Carte du Mexique de feu M. Delisle, mais beaucoup moins de la derniere Edition en une feuille de l'Amérique du même Auteur. M. Buache faisoit gloire d'être Disciple de M. Delisle, mais il avoit eu l'avantage de travailler sur quantité de Mémoires que le Maitre n'avoit pas connus. Plus on en a devant soi, plus on peut approcher de la vérité dans les déterminations; mais aussi le travail se multiplie à proportion, par le grand nombre d'attentions, de réflexions, & de combinaisons nécessaires.

NOus renvoyons entierement aux Mémoires

* Les Remarques de M. de Mairan sur la comparaison de Paris & de Londres.

* V. les M. p. 801.

MECHANIQUE.

SUR LES VOUTES *.

M. COUPLET continue la Théorie des Voûtes, qu'il n'avoit donnée en 1729 †, que dans l'Hypothese purement géométrique &

* V. les M. p. 167. † V. l'Hist. de 1729. p. 103. & suiv.

& réellement fauffe, que les Vouffoirs fuffent parfaitement polis. Ici il reprend la réalité, les Vouffoirs s'engrénent par leurs furfaces les uns dans les autres, & il y faut même ajouter ce qui n'eft pas tout-à-fait réel, qu'ils s'engrénent de façon à ne pouvoir ceder à aucune force, dont l'effet ne feroit que de faire gliffer une furface fur une autre; car la Géométrie ne peut jamais s'allier à la Méchanique, qu'en y fuppofant quelque chofe de plus abfolu & de plus précis que le vrai.

Une Voûte étant conftruite, dont je fuppofe pour plus de facilité que l'intrados & l'extrados font deux demi-Cercles concentriques, fi l'on conçoit une ligne tirée du milieu de la Clef fur un pied-droit, & qui repréfentera l'action ou l'effort de la Voûte fur ce pied-droit, cette ligne en cas qu'elle paffe toute entiere dans l'épaiffeur de la Voûte, fera deux effets differens, felon l'hypothefe des Vouffoirs polis, ou non polis. Dans l'une & l'autre hypothefe, elle eft néceffairement inclinée au pied-droit; mais dans la premiere, elle fera gliffer le dernier Vouffoir par ce qu'elle a d'horizontal dans fon effort, & le Vouffoir auroit befoin d'une pefanteur infinie pour lui réfifter; mais dans la 2de hypothefe, elle ne peut le faire gliffer, & à cet égard la Voûte feroit inébranlable. Que fi la ligne n'étoit pas toute entiere dans l'épaiffeur de la Voûte, & qu'elle coupât le Quart de Cercle de l'intrados, il eft vifible que l'action de la Voûte manquant d'appui dans une partie de fon étendue, & tombant,

pour

pour ainsi dire, à vuide, la Voûte se démentiroit aisément.

Dans cette 2de hypothese où le dernier Voussoir ne peut glisser sur le pied-droit, il ne laisse pas pour cela de pouvoir être renversé du dedans de la Voûte en dehors, & c'est ce qu'il y a ici de plus important à expliquer.

M. Couplet partage en quatre Voussoirs égaux la Voûte demi-circulaire, que nous avons supposée. Il suffit d'en considerer une moitié, qui n'a donc que deux Voussoirs. Le 1er Voussoir ou le supérieur tend à tomber par une ligne verticale tirée de son centre de gravité. Cette verticale est la diagonale d'un parallelogramme, dont deux côtés sont horizontaux, & les deux autres inclinés à l'horizon. Des deux horizontaux, le supérieur ne fait que pousser selon sa direction le 1er Voussoir de l'autre moitié de la Voûte, qui lui résiste avec un effort égal, l'horizontal inférieur pousse le 2d Voussoir sur lequel le 1er est posé, & le pousse de façon qu'il tend à le renverser du dedans de la Voûte en dehors. Les deux côtés inclinés du parallelogramme n'agissent que par ce qu'ils ont de vertical, & par-là ne tendent qu'à affermir le 2d Voussoir sur le pied-droit, & par conséquent le 1er Voussoir ne tend à renverser le 2d qu'autant qu'il a un effort horizontal plus grand que le vertical. D'un autre côté le 2d Voussoir tend à tomber en dedans de la Voûte selon une verticale tirée de son centre de gravité, & cet effort est contraire à celui que le 1er Voussoir fait contre lui. Il faut pour

l'équilibre, que ces deux efforts oppofés, ou plutôt ces deux énergies, foient égales; je dis *énergies*, parce que tout effort fe rapportant à un point fixe auquel il fe dirige, il faut confiderer la diftance de la direction de chaque effort à ce point fixe, ou, ce qui eft le même, fon bras de levier, toujours, comme l'on fait, d'autant plus avantageux qu'il eft plus long.

Une Voûte, telle qu'on l'a fuppofée, demande donc pour être bien conftruite, & auffi durable qu'elle peut l'être, que cet équilibre fe trouve entre les deux Vouffoirs de chacune de fes moitiés. Il ne peut s'y trouver, fans mettre une certaine proportion entre les parties de la Voûte; fi elle eft d'une certaine ouverture, ou pour parler plus précifément, fi le diametre du demi-Cercle de fon intrados eft d'une certaine grandeur, il faudra qu'elle ait une certaine épaiffeur, ou que fon intrados & fon extrados foient à une certaine diftance l'un de l'autre; & comme ce font ici deux demi-Cercles concentriques, cette diftance fera par-tout égale. Il eft vifible qu'elle fera en même tems la moindre qu'il fe puiffe, & que la Voûte n'aura que l'épaiffeur abfolument néceffaire, puifque tout dépendra de l'équilibre des Vouffoirs, qui confifte en un point indivifible. M. Couplet cherche par l'Algebre quelle fera cette épaiffeur de la Voûte, tout le refte étant connu, & il ne parvient à cette détermination que par des calculs qui, fans tomber dans les grandes difficultés de l'Art, font cependant fort longs & fort pénibles. Si le diame-

metre de l'intrados est de 28 pieds, l'épaisseur uniforme de la Voûte sera de 1 pied & environ $\frac{1}{2}$.

Mais si on suppose que la Voûte, au-lieu d'être formée de deux demi-Cercles concentriques, ou de deux arcs de 180 degrés, le soit de deux arcs de 120 seulement, & que son ouverture où la corde de l'intrados soit encore de 28 pieds, on trouvera que l'épaisseur uniforme sera beaucoup moindre; & la raison en est que les leviers par lesquels agiront les efforts des Voussoirs inférieurs seront plus longs, & que par conséquent les poids absolus n'auront pas besoin d'être si grands, ce qui emporte une moindre épaisseur de la Voûte.

En effet, si l'on conçoit une Voûte formée de quatre Voussoirs, comme celles que nous considerons ici, mais infiniment platte, de sorte que l'étendue, tant de l'intrados, que de l'extrados, soit égale à la corde de l'intrados, à 28 pieds, si l'on veut; & si l'on conçoit encore dans les Voussoirs les mêmes efforts que dans les précédens; on verra sans peine que ces efforts rapportés à leurs points fixes, agiront par des bras de levier plus longs qu'en toute autre supposition, & que si on vient à courber l'intrados & l'extrados en augmentant leur longueur, mais en conservant l'ouverture ou corde de 28 pieds, les bras de leviers s'accourciront toujours, à mesure que la courbure sera plus grande. De deux Voûtes, qui, sur une même ouverture ou corde de l'intrados, ont l'une 120 degrés, l'autre 180, la premiere est certainement la

d'où le Corps est tombé, ou, ce qui est le même, s'exprime par cette racine. Donc la racine de 14 exprime la vîtesse acquise à la fin de la 1re Seconde par le Corps dont le mouvement s'est toujours accéléré, & 28 exprime la vîtesse qu'il auroit pendant chaque Seconde, s'il prenoit un mouvement uniforme dont la vîtesse fût égale à celle du dernier instant de sa chute.

Ce rapport de la racine de 14 & de 28 n'est pas seulement pour une chute faite en une Seconde, il se retrouvera encore dans toutes les autres. Que le Corps soit tombé pendant 2 Secondes, il aura parcouru 4 fois 14 pieds, & la racine de cette nouvelle hauteur d'où il sera tombé est 2 fois la racine de 14. D'un autre côté sa vîtesse acquise à la fin de la nouvelle chute sera double de la vîtesse de la premiere; donc la vîtesse uniforme, qu'on suppose toujours qu'il prendra, sera 2 fois 28. Or 2 racines de 14, & 2 fois 28, ont le même rapport que la racine de 14 & 28. Il en ira de même si le Corps tombe pendant 3 Secondes, pendant 4, &c. Donc la Règle de M. Pitot est vraye, que la vîtesse acquise par une chute faite d'une hauteur quelconque, ou, ce qui est le même, la racine de cette hauteur, est à la vîtesse uniforme que le Corps prendroit ensuite, comme la racine de 14 à 28.

De-là il suit évidemment, que si une Eau qui est tombée d'une hauteur quelconque vient ensuite à couler horizontalement ou à peu près, & par conséquent d'un mouvement uniforme, le quarré de sa vîtesse uniforme est

eſt égal à 56 fois la hauteur d'où elle eſt tombée. On voit aſſez tout ce qui ſe peut tirer de cette formule générale.

On conçoit toujours que la quantité de l'Eau qui ſort, ou plus préciſément, tombe d'un Réſervoir ou d'un Tuyau, eſt plus grande en même raiſon que ſa vîteſſe, qui dépend de la hauteur d'où elle tombe, eſt plus grande; & de-là vient que ſi on oppoſe à cette eau tombante une ſurface perpendiculaire à la direction de ſa chute, elle fait ſur cette ſurface une impreſſion, qui eſt ſelon le quarré de ſa vîteſſe. Mais, ce qu'on n'auroit peut-être pas cru, cette propoſition reçue de tous les Méchaniciens n'eſt vraye qu'avec une modification, tant ces matieres-là ſont délicates, & tant en général toutes celles qui ſont examinées de près le deviennent. Si on prend l'eau à ſa ſortie du Réſervoir ou du Tuyau, & qu'on lui oppoſe une ſurface, la propoſition ſera exactement vraye, & la quantité d'eau d'autant plus grande que ſa vîteſſe à ſa ſortie ſera plus grande. Si on ne lui oppoſe la ſurface que plus loin de l'ouverture par où elle ſort, ſa vîteſſe ſera certainement plus grande, puiſqu'elle ſe ſera toujours accélérée hors du tuyau, & d'autant plus que l'eſpace parcouru dans l'air aura été plus grand; cependant il eſt certain auſſi que la quantité d'eau ne ſera pas plus grande dans ce 2[d] cas que dans le 1[er], & ce qui le prouve bien évidemment, c'eſt que ſi après une certaine quantité d'eau écoulée, on fermoit l'ouverture du tuyau, cette eau qui en ſeroit ſortie accéléreroit toujours ſa vîteſſe dans l'air, & n'en

n'en feroit pas en plus grande quantité. Que fi on fuppofoit le tuyau prolongé jufqu'au point où fe terminoit la chute de l'eau dans l'air, alors la quantité d'eau redeviendra proportionnelle à fa derniere vîteffe. Quelle eft cette bizarrerie apparente? Quelle eft, comme dit M. Pitot, la vertu des parois du tuyau pour rendre la quantité d'eau plus grande? Voici le dénouement qu'on peut donner à cette difficulté.

La quantité d'eau n'eft plus grande à raifon de la vîteffe, que quand l'eau fe meut d'un mouvement uniforme, & non quand elle fe meut d'un mouvement accéléré, car il eft vifible que pour lui faire parcourir plus vîte un certain efpace dans un certain tems, le mouvement accéléré ne touche point à fa quantité, & la laiffe telle qu'elle étoit; au-lieu que pour le même effet il eft impoffible que le mouvement uniforme ne faffe augmenter fa quantité. Or tant que l'eau fe meut dans le tuyau, elle a un mouvement uniforme, & tombe comme un cylindre d'eau continu dont les parties fupérieures & inférieures n'ont que la même vîteffe, ainfi que nous l'avons dit plus au long en 1703 *. Mais quand elle eft fortie du tuyau, elle a un mouvement accéléré. La conféquence s'offre d'elle-même. Nous pouvons remarquer ici en paffant, que quoique l'eau ne fe meuve dans le tuyau que d'un mouvement uniforme, fa vîteffe à la fortie eft la même que fi elle y avoit eu un mouvement accéléré, & que ce-

* p. 153. & fuiv.

celui qu'elle a ensuite en tombant dans l'air est le même que s'il étoit la continuation d'un mouvement accéléré précédent dans le tuyau.

Sur ce fondement M. Pitot ne manque pas d'avertir que quand il sera question de calculer la force d'une eau, qui étant sortie d'un réservoir aura parcouru quelque espace dans l'air avant que de choquer une surface, on se trompera, si, comme il pourroit arriver fort naturellement, on suppose sa quantité proportionnelle à la derniere vîtesse acquise par sa chute; on trouvera la force plus grande qu'elle ne l'est effectivement: & afin que ce calcul soit bon, il faut prendre l'eau à sa sortie du réservoir, ou si proche que la difference puisse être négligée.

Après tout cela, M. Pitot applique sa Théorie aux Rivieres. Pour les considerer géométriquement, il faut supposer d'abord des choses qui ne se trouvent pas dans la réalité; que leurs lits sont formés de trois plans droits & uniformes, l'un inférieur incliné à l'Horizon, les deux autres verticaux; que l'inclinaison de l'inférieur est par-tout la même; & qu'enfin une Riviere n'en reçoit point d'autre. Voici ce qui s'ensuivroit de ces Hypotheses.

1°. Il seroit très aisé de trouver quelle seroit la derniere vîtesse de la Riviere, celle avec laquelle elle se présenteroit pour entrer dans la Mer, pourvu que l'on connût la pente ou l'inclinaison de son lit. Cette vîtesse seroit exprimée par la racine de la hauteur, qu'auroit la source de la Riviere à l'égard du niveau de la Mer.

2°. Comme la vîtesse des Rivieres s'accéléreroit toujours, elles ne demanderoient toujours qu'un lit moins large, parce que la même quantité d'eau mûe plus vîte peut passer dans un tems égal par un espace plus étroit; & comme elles se font leurs lits elles-mêmes, elles n'en auroient donc que d'ainsi conditionnés.

Ceci n'est point contraire à ce qui a été dit ci-dessus, que le mouvement accéléré n'augmentoit point la quantité d'eau. Il s'agissoit d'un mouvement vertical, ici c'est un mouvement incliné, dans la composition duquel entre l'horizontal uniforme aussi-bien que le vertical accéléré. Comme ils sont liés ensemble, l'horizontal devient plus grand avec le vertical.

3°. Ce qu'on a dit de la largeur des lits, il faut le dire de la profondeur, elle diminueroit toujours.

4°. Les Rivieres seroient toujours plus étroites, moins profondes, & plus rapides, à mesure qu'elles avanceroient dans leur cours.

Heureusement pour nous, c'est le contraire dans la Nature. Les Rivieres seroient très peu navigables, soit à cause de leur trop grande rapidité, soit à cause du peu de profondeur. Les inégalités tant de leurs bords que de leur fond, les frottemens qu'elles y souffrent, rallentissent beaucoup la vîtesse qu'elles auroient naturellement, & dans l'état, pour ainsi dire, géométrique. Nous avons expliqué dans un assez grand détail en 1710 * com-

* p. 159. & suiv.

comment elles élargissent nécessairement leur lit, & en même tems le creusent de maniere à en rendre le fond presque horizontal.

M. Pitot ajoute une nouvelle considération, c'est l'entrée des Rivieres dans la Mer. En supposant une surface plane mise entre deux fluides qui la poussent avec des directions contraires, & des vîtesses inégales, il est certain qu'elle entrera avec une certaine vîtesse dans le fluide dont la vîtesse est la moindre: il trouve l'expression algébrique de la vîtesse de la surface; c'est la même que celle d'un fleuve plus rapide qui entreroit dans un plus lent, dont le cours seroit directement opposé. Mais comme la Mer n'a point de cours, il faut supposer nulle la vîtesse moindre du second fleuve, & alors la formule donne précisément pour la vîtesse du fleuve qui entre dans la Mer, la moitié de celle qu'il avoit quand il a rencontré la Mer.

Quand un fleuve est arrivé de sa source au quart de son cours, il a, selon le systême de Galilée, la moitié de la derniere vîtesse qu'il aura à son embouchure. Donc, suivant ce qui vient d'être dit, il a la même vîtesse, & au quart de son cours, & à l'extrémité; donc il ne peut pas y avoir grande variation dans tout l'entre-deux, le cours devient assez horizontal, & le mouvement assez uniforme. La Mer est un obstacle qui attend toujours le fleuve, arrête & suspend ses eaux jusqu'à un certain point, & a une espece d'effet rétroactif qu'il n'est pas difficile de comprendre.

MACHINES OU INVENTIONS APPROUVÉES PAR L'ACADEMIE EN M. DCCXXX.

I.

UNE espece de Martinet de Forge présenté par M. Compagnot, pesant 300 livres, que deux Hommes élevent assez facilement, par la disposition des pieces de la Machine, & qui retombe ensuite par son propre poids. On a trouvé assez ingénieuse la maniere dont la force des Hommes est appliquée, aussi-bien que celle dont agissent deux Etriers de fer, qui engagent & laissent échaper alternativement le Martinet. Le reste a paru conforme à la plupart des Machines où l'on employe le secours des Hommes. On a cru que cette Machine pourroit être utile dans les endroits où il est absolument impossible de se servir du cours des Rivieres, mais non pas pour élever des Eaux, ou faire mouvoir differens Moulins.

II.

Une Machine arithmétique de M. de Boissendeau, qui a assuré qu'il ne connoissoit point celle de M. Pascal, & qui étoit effectivement assez jeune pour n'en avoir pas en-

core entendu parler. On a trouvé beaucoup de génie & d'induſtrie dans l'invention & dans l'exécution. Les mouvemens ſont ſimples & doux. Les opérations arithmétiques ſe font ſans qu'il ſoit beſoin de rein écrire; on pourroit même operer ſur toutes ſortes de fractions, au moyen d'un changement de Roue aiſé à faire ſur le champ.

III.

Un Flambeau ou Chandelier préſenté par Melle du Château, dont la Bobeche eſt garnie d'un fond mobile, qui ſe hauſſe ou ſe baiſſe, en faiſant tourner la tige briſée, qui y eſt adaptée, le tout pour pouſſer à volonté la Chandelle que l'on y enfonce, ſoit pour l'en ôter aiſément, ſoit pour la faire bruler juſqu'au bout. Quoique l'on ait déja appliqué la même Méchanique à des Canifs, & autres Outils pour un ſemblable uſage, ce Chandelier a paru ſimple, & utile.

ELOGE

DE M. DE VALINCOURT.

JEAN-BAPTISTE HENRI DU TROUSSET DE VALINCOURT, nâquit le 1 Mars 1653, de Henri du Trousset, & de Marie du Pré. La famille étoit noble & honorable, originaire de St. Quentin en Picardie. Ayant perdu son Pere à l'âge de 6 ou 7 ans, il demeura entre les mains d'une Mere propre à remplir seule tous les devoirs de l'éducation de ses Enfans.

Il ne brilla point dans ses Classes; ce Latin & ce Grec qu'on y apprend n'étoient pour lui que des sons étrangers, dont il chargeoit sa mémoire, puisqu'il le falloit: mais ses Humanités finies, s'étant trouvé un jour seul à la Campagne avec un Térence pour tout amusement, il le lut d'abord avec assez d'indifférence, & ensuite avec un goût, qui lui fit bien sentir ce que c'étoit que les Belles-Lettres. Il n'avoit point été picqué de cette vanité si naturelle de surpasser ses compagnons d'étude, sans savoir à quoi il étoit bon de les surpasser; mais il fut touché de la valeur réelle & solide, jusque là inconnue, de ce qu'on avoit proposé à leur émulation. Déja sa raison seule avoit droit de le remuer.

Il répara avec ardeur la nonchalance du tems passé, il se mit à se nourrir avidement de

de la lecture des bons Auteurs anciens & modernes. Il lui échapa quelques petits Ouvrages en Vers, fruits assez ordinaires de la jeunesse de l'Esprit, qui est alors en sa fleur, s'il en doit avoir une. M. de Valincourt ne regardoit pas ses Vers assez sérieusement, pour en faire parade, ni même pour les desavouer. Il a conservé jusqu'à la fin l'habitude de cette langue, qu'il ne parloit qu'à l'oreille de quelques Amis, & en badinant.

La fameuse Princesse de Cleves ayant paru, Ouvrage d'une espece qui ne peut naitre qu'en France, & ne peut même y naitre que rarement, M. de Valincourt en donna une Critique en 1678, non pour s'opposer à la juste admiration du Public, mais pour lui apprendre à ne pas admirer jusqu'aux défauts, & pour se donner le plaisir d'entrer dans des discussions fines & délicates. Ce dessein interessoit le Censeur à faire valoir lui-même, comme il a fait, les beautés, au travers desquelles il avoit su démêler les imperfections. Au-lieu de la bile ordinaire, il répand dans son discours une gayeté agréable; & peut-être seulement pourroit-on croire qu'il va quelquefois jusqu'au ton de l'Ironie, qui, quoique leger, est moins respectueux pour un Livre d'un si rare mérite, que le ton d'une Critique sérieuse, & bien placée.

On répondit avec autant d'aigreur & d'amertume, que si on avoit eu à défendre une mauvaise cause. M. de Valincourt ne repliqua point. Les honnêtes-gens n'aiment point à s'engager dans ces sortes de combats, trop desavantageux pour ceux qui ont les

mains

mains liées par de bonnes mœurs, & par les bienséances; & le Public lui-même, malgré sa malignité, se lasse bien-tôt de ce spectacle. Après avoir vu une ou deux Joûtes, il laisse les deux Champions se battre sur l'Arene sans témoins.

Un homme de mérite n'est pas destiné à n'être qu'un Critique, même excellent, c'est-à-dire, habile seulement à relever des défauts dans les productions d'autrui, impuissant à produire de lui-même. Aussi M. de Valincourt se tourna-t-il bien vîte d'un autre côté plus convenable à ses talens, & à son caractere. Il donna en 1681, la *Vie de François de Lorraine Duc de Guise*, petit morceau d'Histoire, qui remplit tout ce qu'on demande à un bon Historien; des recherches qui, quoique faites avec beaucoup de soin, & prises quelquefois dans des sources éloignées, ne passent point les bornes d'une raisonnable curiosité; une narration bien suivie, & animée, qui conduit naturellement le Lecteur, & l'interesse toujours; un stile noble & simple, qui tire ses ornemens du fond des choses, ou les tire d'ailleurs bien finement; nulle partialité pour le Héros, qui pouvoit cependant inspirer de la passion à son Ecrivain.

Un Avertissement de l'Imprimeur à la tête de ce petit Livre annonce d'autres Ouvrages du même genre, & sans doute de la même main; mais M. de Valincourt n'eut pas le loisir de les finir: l'illustre Evêque de Meaux, qui ordinairement fournissoit aux Princes les gens de mérite dans les Lettres, dont ils avoient besoin, le fit entrer en 1685 chez M. le

le Comte de Toulouse, Amiral de France. Ce ne fut encore qu'en qualité de Gentilhomme attaché à sa suite, mais quelque tems après le Sécrétariat général de la Marine étant venu à vaquer, il fut donné à M. de Valincourt. Le Prince le fit aussi Sécrétaire de ses Commandemens, & quand S. A. S. eut le Gouvernement de Bretagne, ce fut encore un nouveau fonds de travail pour le Sécrétaire, dont les occupations se multiplioient à proportion des dignités de son Maitre. Ses anciennes études l'avoient préparé, sans qu'il y pensât, à des fonctions si importantes; les nouvelles connoissances dont il eut besoin entrerent plus aisément, & se placerent mieux dans un esprit où elles en trouvoient déja d'autres, qu'elles n'eussent fait dans un esprit entierement vuide.

Lorsqu'en 1704, M. l'Amiral gagna la Bataille de Malaga contre les Flottes Angloise & Hollandoise jointes ensemble, M. de Valincourt, qui n'étoit point Officier de Marine, & ne prétendoit nullement aux récompenses militaires, fut toujours à ses côtés, jusqu'à ce qu'il eut reçu une blessure à la jambe, de l'éclat d'un coup de Canon, qui tua un Page. Cet attachement si fidele, porté jusqu'aux occasions où il étoit si périlleux, & en même tems tout-à-fait inutile, avoit pour objet un Maitre, qui savoit se faire aimer, & dont la justice & la droiture feroient un mérite & un nom à un homme du commun. Aussi M. de Valincourt a-t-il été honoré de la même confiance & des mêmes bontés, sans interruption, sans trouble,

sans

sans essuyer aucun orage de Cour, sans en craindre, & cela pendant 45 ans. Cependant il n'étoit point flateur, un Prince du même Sang lui rend hautement ce témoignage. Il est vrai qu'il avoit un art de dire la vérité, mais enfin il osoit la dire, & l'adresse ne servoit qu'à rendre le courage utile. Peu à peu la nécessité d'employer cette adresse diminue, & les droits de l'homme de bien se fortifient toujours.

Tout le tems, que les emplois de M. de Valincourt lui laissoient libre, étoit donné à des études de son goût, & principalement à celles qui avoient rapport à ses emplois, car son devoir déterminoit assez son goût. La Marine tient à la Physique, & encore plus essentiellement aux Mathématiques, & il ne manqua pas d'ajouter aux Belles-Lettres, qui avoient été sa premiere passion, ces Sciences plus élevées & plus abstraites. Ainsi il se trouva en état de remplir dignement une place d'Honoraire, à laquelle l'Académie le nomma en 1721. Il étoit de l'Académie Françoise dès 1699. Je l'ai vu dans l'une & dans l'autre, j'ai été témoin de sa conduite, & de ses sentimens. Il ne croyoit pas que ce fût assez de voir son nom écrit dans les deux Listes; qu'il en retireroit toujours, sans y rien mettre du sien, l'honneur qui lui en pouvoit revenir; que tout le reste lui devoit être indifférent; & que des titres, qui par eux-mêmes laissent une grande liberté, laissoient jusqu'à celle de ne prendre part à rien. Il avoit pour ces Compagnies une affection sincere, une vivacité peu commune pour leurs

leurs interêts ; & en effet une Académie est une espece de Patrie nouvelle, que l'on est d'autant plus obligé d'aimer, qu'on l'a choisie: mais il faut convenir que ces obligations délicates ne sont pas pour tout le monde.

Il avoit travaillé toute sa vie à se faire dans une Maison de campagne qu'il avoit à St Cloud, & où il se retiroit souvent, une Bibliotheque choisie. Elle montoit à 6 ou 700 Volumes, lorsqu'elle fut entierement consumée, il y a près de 5 ans, par le feu qui prit à la Maison: ses Recueils, fruits de toutes ses lectures, des Mémoires importans sur la Marine, des Ouvrages, ou ébauchés ou finis, tout périt en même tems, & il en fut le spectateur. La Philosophie, qui auroit été plus rigide sur une perte de biens, lui permettoit d'être sensiblement affligé de celle d'un Trésor amassé par elle-même, & où elle se complaisoit; mais son courage ne se démentit point: *Je n'aurois guere profité de mes Livres*, disoit-il, *si je ne savois pas les perdre*. Il étoit encore soutenu par une Philosophie bien supérieure, par la Religion, dont il fut toujours vivement pénétré.

Vers la fin de sa vie il fut de tems en tems attaqué de diverses maladies, qui le mirent encore à de plus grandes épreuves. Enfin il mourut le 4 Janv. 1730, âgé de 77 ans.

On s'appercevoit aisément dans son commerce ordinaire, qu'il étoit plein de bonnes lectures. Il en ornoit volontiers sa conversation & ses lettres, mais à propos, avec nouveauté, avec grace, conditions nécessaires, & peu observées. Un certain sel qu'il

avoit dans l'eſprit, l'eût rendu fort propre à la raillerie, mais il s'eſt toujours défendu courageuſement l'uſage d'un talent dangereux pour qui le poſſede, injuſte à l'égard des autres.

Il a été ami particulier de la plupart de ceux qui ont brillé dans les Lettres, principalement de Mrs Racine & Deſpréaux, & par cette raiſon il fut choiſi après la mort de M. Racine pour être aſſocié à M. Deſpréaux dans le travail ou le deſſein de l'Hiſtoire du feu Roi. Apparemment ſa liaiſon avec ce grand Satirique lui fit adopter quelques-uns de ſes jugemens, tels que celui qu'il portoit contre le prémier de nos Poëtes Lyriques; jugement inſoutenable ſur le Parnaſſe, & recevable ſeulement dans un Tribunal infiniment plus reſpectable, où le Satrique lui-même n'eût pas d'ailleurs trouvé ſon compte. Cependant M. de Valincourt ne ſe laiſſa point emporter à l'exceſſive chaleur que mirent ſes Amis dans des diſputes litteraires, qui ont fait aſſez de bruit. Il continua de vivre en amitié avec ceux qui refuſoient l'adoration aux Anciens, il négocia même des reconciliations, & donna des exemples rares de moderation & d'équité, quoique dans une bagatelle.

Mais il n'a pas eu ſeulement des amis dans les Lettres, il en a eu dans les premieres places de l'Etat, non pas ſimplement comme un homme d'eſprit dont la converſation peut délaſſer, mais comme un homme d'un grand ſens, à qui on peut parler d'affaires. Il ne s'eſt jamais fait valoir de ces commerces ſi

flateurs

flateurs & si dangereux pour la vanité, il les cachoit autant qu'il étoit possible; & ce qu'il cachoit encore avec plus de soin, c'est l'usage qu'il en a fait toutes les fois que la justice ou le mérite ont eu besoin de son crédit.

Il n'étoit point marié, & jouïssoit d'un revenu considerable. Sa famille publie hautement sa générosité pour elle, & ses bienfaits toujours prévenans: mais elle craindroit d'offenser sa vertu, & d'aller contre ses intentions, si elle révéloit ce qu'il a fait d'ailleurs par des motifs plus élevés.

ELOGE

DE M. DU VERNEY.

GUICHARD-JOSEPH DU VERNEY nâquit à Feurs en Forez, le 5 Août 1648, de Jacques du Verney Médecin de la même Ville, & d'Antoinette Pittre. Ses Classes faites, il étudia en Médecine à Avignon pendant 5 ans, & en partit en 1667 pour venir à Paris, où il se sentoit appellé par ses talens.

A peine arrivé dans cette grande Ville, il alla chez le fameux Abbé Bourdelot, qui tenoit des Conferences de Gens de Lettres de toutes les especes. Il leur fit une Anatomie du Cerveau, & d'autres ensuite chez M. Denys savant Médecin, où l'on s'assembloit aussi. Il démontroit ce qui avoit été découvers

vert par Sténon, Swammerdam, Graaf, & les autres grands Anatomistes, & il eut bientôt une réputation.

Outre ses connoissances déja grandes & rares par rapport à son âge, ce qui contribua beaucoup à le mettre promptement en vogue, ce fut l'éloquence avec laquelle il parloit sur ces matieres. Cette éloquence n'étoit pas seulement de la clarté, de la justesse, de l'ordre, toutes les perfections froides que demandent les sujets dogmatiques ; c'étoit un feu dans les tours, & jusque dans la prononciation, qui auroit presque suffi à un Orateur. Il n'eût pas pu annoncer indifferemment la découverte d'un Vaisseau, ou un nouvel usage d'une partie ; ses yeux en brilloient de joye, & toute sa personne s'animoit. Cette chaleur ou se communique aux Auditeurs, ou du moins les préserve d'une langueur involontaire, qui auroit pu les gagner. On peut ajouter qu'il étoit jeune, & d'une figure assez agréable. Ces petites circonstances n'auront lieu, si l'on veut, qu'à l'égard d'un certain nombre de Dames, qui furent elles-mêmes curieuses de l'entendre.

A mesure qu'il parvenoit à être plus à la mode, il y mettoit l'Anatomie, qui renfermée jusque-là dans les Ecoles de Médecine, ou à St. Cosme, osa se produire dans le beau monde, présentée de sa main. Je me souviens d'avoir vu des gens de ce monde-là, qui portoient sur eux des pieces seches préparées par lui, pour avoir le plaisir de les montrer dans les Compagnies, sur-tout celles qui appartenoient aux sujets les plus inte-

tereſſans. Les Sciences ne demandent pas à conquérir l'Univers, elles ne le peuvent, ni ne le doivent; elles ſont à leur plus haut point de gloire, quand ceux qui ne s'y attachent pas, les connoiſſent aſſez pour en ſentir le prix & l'importance.

Il entra en 1676 dans l'Académie, qui ne comptoit encore que 10 années depuis ſon établiſſement. On crut réparer par lui la perte que la Compagnie avoit faite de Mrs Gayent & Pecquet, tous deux habiles Anatomiſtes, mais le dernier plus fameux par la découverte du Réſervoir du Chile, & du Canal Thorachique. Du caractere dont étoit M. du Verney, il n'avoit pas beſoin de grands motifs pour prendre beaucoup d'ardeur. Il ſe mit à travailler à l'Hiſtoire-Naturelle des Animaux, qui faiſoient alors une partie des occupations de l'Académie, & il tient beaucoup de place dans l'Hiſtoire Latine de M. du Hamel.

Quand ceux qui étoient chargés de l'éducation de M. le Dauphin, ayeul du Roi, ſongerent à lui donner des connoiſſances de Phyſique, on fit l'honneur à l'Académie de tirer de ſon corps ceux qui auroient cette fonction, & ce furent M. Roëmer pour les Expériences générales, & M. du Verney pour l'Anatomie. Celui-ci préparoit les parties à Paris, & les tranſportoit à St Germain, ou à Verſailles. Là il trouvoit un Auditoire redoutable, le Dauphin environné de M. le Duc de Montauſier, de M. l'Evêque de Meaux, de M. Huet depuis Evêque d'Avranches, de M. de Cordemoi, qui tous, en ne

comptant pour rien les titres, quoiqu'ils fassent toujours leur impression, étoient fort savans, & fort capables de juger même de ce qui leur eût été nouveau. Les démonstrations d'Anatomie réussirent si bien auprès du jeune Prince, qu'il offrit quelquefois de ne point aller à la Chasse, si on les lui pouvoit continuer après son dîner.

Ce qui avoit été fait chez lui, se recommençoit chez M. de Meaux avec plus d'étendue & de détail. Il s'y assembloit de nouveaux Auditeurs, tels que M. le Duc de Chevreuse, le P. de la Chaise, M. Dodart, tous ceux que leur goût y attiroit, & qui se sentoient dignes d'y paroitre. M. du Verney fut de cette sorte pendant près d'un an l'Anatomiste des Courtisans, connu de tous, & presque ami de ceux qui avoient le plus de mérite. Ses succès de Paris l'avoient porté à la Cour, & il en revint à Paris avec ce je ne sai quoi de plus brillant que donnent les succès de la Cour.

Les fatigues de son métier, très pénible par lui-même, & plus pénible pour lui que pour tout autre, lui causerent un mal de Poitrine si violent, qu'on lui crut un Ulcere au Poumon. Il en revint cependant, bien résolu à se ménager davantage à l'avenir. Mais comment exécuter cette résolution? Comment résister à mille choses qui s'offroient, & qui forçoient ses regards & ses recherches à se tourner de leur côté? Comment leur refuser ses nuits, même après les jours entiers? Souvent l'Anatomie ne souffre pas

de

de délais; mais quand elle en eût souffert, en pouvoit-il prendre?

En 1679 il fut nommé Professeur d'Anatomie au Jardin Royal, & il alla en Basse-Bretagne pour y faire des dissections de Poissons, envoyé dans cette vue avec M. de la Hire, qui devoit avoir d'autres occupations. Ils furent envoyés tous deux l'année suivante sur la Côte de Bayonne, pour les mêmes desseins. Il entra dans une Anatomie toute nouvelle, mais il ne put qu'ébaucher la matiere, & depuis son retour la seule structure des Oüies de la Carpe lui couta plus de tems que tous les Poissons qu'il avoit étudiés dans ses deux voyages.

Il mit les exercices Anatomiques du Jardin Royal sur un pied où ils n'avoient pas encore été. On vit avec étonnement la foule d'Ecoliers qui s'y rendoit, & on compta en une année jusqu'à 140 Etrangers. Plusieurs d'entre eux retournés dans leurs Païs, ont été de grands Médecins, de grands Chirurgiens, & ils ont semé dans toute l'Europe le nom & les louanges de leur Maitre. Sans doute ils ont souvent fait valoir son autorité, & se sont servis du fameux, *il l'a dit*. Nous avons rapporté dans l'Eloge de M. Lemery * qu'il faisoit ici en même tems des Cours de Chimie avec le même éclat. Une Nation, qui auroit pris sur les autres une certaine supériorité dans les Sciences, s'appercevroit bien-tôt que cette gloire ne seroit pas stérile, & qu'il lui en

* V. l'Hist. de 1715. p. 98.

en reviendroit des avantages auſſi réels, que d'une marchandiſe néceſſaire & précieuſe, dont elle feroit ſeule le commerce.

Il publia en 1683 ſon *Traité de l'Organe de l'Ouie*, qui fut traduit en Latin dès l'année ſuivante, & imprimé à Nuremberg. Cette traduction a été inſerée dans la Bibliotheque Anatomique de Manget. On ſera ſurpris que ce ſoit là le ſeul Livre qu'ait donné M. du Verney, vû le long tems qu'il a vécu depuis; mais quand on le connoitra bien, on ſera ſurpris au contraire qu'il l'ait donné. Jamais il ne ſe contentoit pleinement ſur un ſujet, & ceux qui ont quelque idée de la Nature le lui pardonneront. Il faiſoit d'une partie qu'il examinoit, toutes les Coupes differentes qu'il pouvoit imaginer pour la voir de tous les ſens, il employoit toutes les Injections; & cela demande déja un tems infini, ne fût-ce qu'en tentatives inutiles. Mais il arrivoit ce qui arrive preſque toujours des diſcuſſions pouſſées dans un grand détail, elles ne levent guere une difficulté ſans en faire naitre une autre; cette nouvelle difficulté, qu'on veut ſuivre, produit auſſi ſa difficulté incidente, & on ſe trouve engagé dans un Labyrinthe. De plus un premier travail, qui auroit voulu être continué, eſt interrompu par un autre, que quelques circonſtances, ou, ſi l'on veut, la ſimple curioſité rendent indiſpenſable. Une connoiſſance acquiſe comme par hazard aura une eſpece d'effet rétroactif, qui détruira ou modifiera beaucoup de connoiſſances précédentes qu'on croyoit abſolument ſûres. Ajou-

tez à ce fond d'embaras, que produit la nature de l'Anatomie, une peur de se méprendre, une frayeur des jugemens du Public, qui ne peut guere être excessive; & l'on concevra sans peine qu'un très habile Anatomiste peut n'avoir pas imprimé. Il faut pourtant avouer qu'un trop grand amour de la perfection, ou une trop grande délicatesse de gloire, feront perdre au Public une infinité de vues & d'idées, qui pour être d'une certaine utilité n'auroient pas eu besoin d'une entiere certitude ou d'une précision parfaite.

M. du Verney fut assez longtems le seul Anatomiste de l'Académie, & ce ne fut qu'en 1684 qu'on lui joignit M. Méry*. Ils n'avoient rien de commun qu'une extrême passion pour la même Science, & beaucoup de capacité; du reste, presque entierement opposés, sur-tout à l'égard des talens extérieurs. Si l'on pouvoit quelquefois craindre que par le Don de la parole M. du Verney n'eût la facilité de tourner les faits selon ses idées, on étoit sûr que M. Méry ne pouvoit que se renfermer dans une sévere exactitude des faits, & que l'un eût tenu en respect l'éloquence de l'autre. Le grand avantage des Compagnies résulte de cet Equilibre des caracteres. On remarqua que M. du Verney prit un nouveau feu par cette espece de rivalité. Elle n'éclata jamais davantage que dans la fameuse question de la Circulation du sang du Fœtus, dont nous avons tant parlé. Elle le conduisit à examiner d'autres sujets

* V. l'Hist. de 1722. p. 186.

jets qui pouvoient y avoir rapport, la Circulation dans les Amphibies, tels que la Grenouille, car le Fœtus qui vit d'abord ſans reſpirer l'air, & enſuite en le reſpirant, eſt une eſpece d'Amphibie; ceux-là le conduiſoient à d'autres Animaux approchans ſans être Amphibies, comme le Crapaud, & enfin aux Inſectes, qui ſont un Genre à part, & offrent un ſpectacle tout nouveau.

Auſſi excelloit-il dans l'Anatomie comparée, qui eſt l'Anatomie priſe le plus en grand qu'il ſoit poſſible, & dans une étendue où peu de gens la peuvent embraſſer. Il eſt vrai que pour nous & pour nos beſoins, la ſtructure du Corps humain paroîtroit ſuffire; mais on le connoit mieux, quand on connoit auſſi toutes les autres Machines faites à peu près ſur le même deſſein. Après celles-là il s'en preſente d'autres d'un deſſein fort different: il y aura moins d'utilité à les étudier, à cauſe de la grande difference; mais par cette raiſon-là même la curioſité ſera plus piquée, & la curioſité n'a-t-elle pas ſes beſoins?

Dans les premiers tems de ſes exercices du Jardin Royal, il faiſoit & les démonſtrations des parties qu'il avoit préparées, & les diſcours qui expliquoient les uſages, les maladies, les cures, & réſolvoient les difficultés. Mais ſa foibleſſe de Poitrine, qui ſe faiſoit toujours ſentir, ne lui permit pas de conſerver les deux fonctions à la fois. Un habile Chirurgien choiſi par lui faiſoit ſous lui les démonſtrations, & il ne lui reſtoit plus que les diſcours, dans leſquels il avoit de la

peine

peine à se renfermer. C'eſt lui qui a le premier enſeigné en ce lieu-là l'Oſtéologie, & les maladies des Os.

De ſon Cabinet, où il avoit étudié des Cadavres & des Squeletes, il alloit dans les Hôpitaux de Paris, où il étudioit ceux dont les maux avoient rapport à l'Anatomie. Si la Machine du Corps diſſequée & démontrée préſente encore tant d'Enigmes très obſcures, à plus forte raiſon la Machine vivante, où tout eſt ſans comparaiſon moins expoſé à la vue, plus envelopé, plus équivoque. C'étoit là qu'il appliquoit ſa Théorie aux faits, & qu'il apprenoit même ce que la ſeule Théorie ne lui eût pas appris. En même tems il étoit d'un grand ſecours, & aux Malades, & à ceux qui en étoient chargés. Quoiqu'il fût Docteur en Médecine, il évitoit de s'engager dans aucune pratique de Médecine ordinaire, quelque honorable, quelque utile qu'elle pût être; il prévoyoit qu'un cas rare de Chirurgie, une opération ſinguliere, lui auroit cauſé une diſtraction indiſpenſable, & il s'acquittoit aſſez envers le Public de ſon devoir de Médecin, non-ſeulement par les inſtructions générales qu'il donnoit ſur toute l'Anatomie, mais par l'utilité dont il étoit dans les occaſions particulieres.

Loin d'avoir rien à ſe reprocher ſur cet article, il ne ſe reprochoit que d'être trop occupé de ſa profeſſion. Il craignoit que la Religion, dont il avoit un ſentiment très vif, ne lui permît pas un ſi violent attachement, qui s'emparoit de toutes ſes penſées, & de tout

ſon tems. L'Auteur de la Nature, qu'il admiroit & révéroit ſans ceſſe dans ſes Ouvrages ſi bien connus de lui, ne lui paroiſſoit pas ſuffiſamment honoré par ce culte ſavant, toujours cependant accompagné du culte ordinaire le plus régulier. L'âge qui s'avançoit, les infirmités qui augmentoient, contribuoient peut-être à ce ſcrupule, ſans lui donner pourtant le pouvoir de s'y livrer entierement.

Les mêmes raiſons l'empêcherent pendant pluſieurs années de paroitre à l'Académie. Il demanda à être Vétéran, & ſa place fut remplie par M. Petit Docteur en Médecine. Il paroiſſoit avoir oublié l'Académie, lorſque tout d'un coup il ſe réveilla à l'occaſion de la réimpreſſion de l'Hiſtoire-Naturelle des Animaux, à laquelle il avoit eu anciennement beaucoup de part. Il reprit à 80 ans des forces, de la jeuneſſe, pour revenir dans nos Aſſemblées, où il parla avec toute la vivacité qu'on lui avoit connue, & qu'on n'attendoit plus. Une grande paſſion eſt une eſpece d'Ame, immortelle à ſa maniere, & preſque indépendante des Organes.

Il ne perdoit aucun des intervalles que lui laiſſoient des ſouffrances, qui redoubloient toujours, & qui le mirent pluſieurs fois au bord du tombeau. Il revoyoit avec M. Vinslou ſon Traité de l'Oreille dont il vouloit donner une 2de Edition, qui ſe feroit bien ſentir des acquiſitions poſtérieures. Il avoit entrepris un Ouvrage ſur les Inſectes, qui l'obligeoit à des ſoins très pénibles; malgré

ſon

son grand âge, par exemple, il passoit des nuits dans les endroits les plus humides du Jardin, couché sur le ventre sans oser faire aucun mouvement, pour découvrir les allures, la conduite des Limaçons, qui semblent en vouloir faire un secret impénétrable. Sa santé en souffroit, mais il auroit encore plus souffert de rien négliger. Il mourut le 10 Sept. 1730, âgé de 82 ans.

Il étoit en commerce avec les plus grands Anatomistes de son tems, Malpighi, Ruysch, Pitcarne, Bidloo, Boerhave. J'ai vu les Lettres qu'il en avoit reçues, & je ne puis m'empêcher d'en traduire ici une de Pitcarne écrite en Latin, datée de l'an 1712, à cause de son caractere singulier.

Très illustre du Verney, voici ce que t'écrit un homme qui te doit beaucoup, & qui te rend graces de ces discours divins, qu'il a entendus de toi à Paris il y a 30 ans. Je te recommande Thomson mon ami, & Ecossois. Je t'envoyerai bien tôt mes Dissertations où je résoudrai ce Problême: Une Maladie étant donnée, trouver le Remede. *A Edimbourg*, &c. Celui qui s'élevoit à de pareils Problêmes, & dont effectivement le nom est devenu si célébre, se faisoit honneur de se reconnoitre pour Disciple de M. du Verney. On voit de plus par des Lettres de 1698, que lui qui auroit pu instruire parfaitement dans l'Anatomie un frere qu'il avoit, il l'envoyoit d'Angleterre à Paris, pour y étudier sous le plus grand Maitre.

En général il paroît par toutes ces Lettres, que la réputation de M. du Verney étoit très

brillante chez les Etrangers, non-seulement par la haute idée qu'ils remportoient de sa capacité, mais par la reconnoissance qu'ils lui devoient de ses manieres obligeantes, de l'interêt qu'il prenoit à leurs progrès, de l'affection dont il animoit ses Leçons. Ceux qui lui adressoient de nouveaux Disciples, ne lui demandoient pour eux que ce qu'ils avoient éprouvé eux-mêmes. Ils disent tous que son Traité de l'Ouïe leur a donné une envie extrême de voir les Traités des quatre autres Sens qu'il avoit promis dans celui-là; ils l'exhortent souvent à faire part à tout le Public de ses richesses, qu'il ne peut plus tenir cachées après les avoir laissé appercevoir dans ses Discours du Jardin Royal; ils le menacent du péril de se les voir enlever par des gens peu scrupuleux, & on lui cite même un exemple où l'on croit le cas déja arrivé: mais il a toujours été ou peu sensible à ce malheur, ou trop irrésolu à force de savoir.

On lui donne assez souvent dans ces Lettres une premiere place entre tous les Anatomistes. Il est vrai que dans ce qu'on écrit à un homme illustre, il y entre d'ordinaire du compliment: on peut mettre à un haut rang celui qui n'est pas à un rang fort haut, mais on n'ose pas mettre au premier rang celui qui n'y est pas; la louange est trop déterminée, & on ne pourroit sauver l'honneur de son jugement.

Il est du devoir de l'Académie de publier un bienfait qu'elle a reçu de lui. Il lui a légué par son Testament toutes ses Prépara-

tions Anatomiques, qui sont & en grand nombre, & de la perfection qu'on peut imaginer. Cela joint à tous les Squeletes d'Animaux rares, que la Compagnie a depuis longtems dans une Salle du Jardin Royal, composera un grand Cabinet d'Anatomie, moins estimable encore par la curiosité, que par l'utilité dont il sera dans les recherches de ce genre.

ELOGE

DE M. LE COMTE MARSIGLI.

LOUIS FERDINAND MARSIGLI nâquit à Bologne le 10 Juillet 1658, du Comte Charles François Marsigli, issu d'une ancienne Maison Patricienne de Bologne, & de la Comtesse Marguerite Cicolani. Il fut élevé par ses parens selon qu'il convenoit à sa naissance; mais il se donna à lui-même, quant aux Lettres, une éducation bien supérieure à celle que sa naissance demandoit. Il alla dès sa premiere jeunesse chercher tous les plus illustres Savans d'Italie; il apprit les Mathématiques de Geminiano Montanari, & d'Alphonse Borelli; l'Anatomie, de Marcel Malpighi; l'Histoire-Naturelle, des observations que son génie lui fournissoit dans ses voyages.

Mais ils eussent été trop bornés, s'ils se

fussent renfermés dans l'Italie. Il alla à Constantinople en 1679, avec le Bayle que Venise y envoyoit. Comme il se destinoit à la Guerre, il s'informa, mais avec toute l'adresse & les précautions nécessaires, de l'état des Forces Ottomanes, & en même tems il examina en Philosophe le Bosphore de Thrace, & ses fameux Courans. Il écrivit sur l'un & l'autre de ces deux sujets. Le Traité du Bosphore parut à Rome en 1681, dédié à la Reine Christine de Suede; & c'est le premier qu'on ait de lui. L'autre intitulé, *Del incremento e decremento dell' Imperio Ottomano*, doit paroitre présentement imprimé à Amsterdam, avec une traduction Françoise.

Il revint de Constantinople dès l'an 1680, & peu de tems après, lorsque les Turcs menaçoient d'une irruption en Hongrie, il alla à Vienne offrir ses services à l'Empereur Leopold, qui les accepta. Il lui fut aisé de prouver combien il etoit au dessus d'un simple Soldat par son intelligence dans les Fortifications, & dans toute la Science de la Guerre; il fit avec une grande approbation des Généraux, des Lignes & des travaux sur le Rab pour arrêter les Turcs, & il en fut récompensé par une Compagnie d'Infanterie en 1683, quand les Ennemis parurent pour passer cette Riviere. Ce fut là qu'après une Action assez vive, il tomba blessé & presque mourant entre les mains des Tartares, le 2 Juillet, jour de la Visitation; ce n'est pas sans raison que nous ajoutons le nom de cette Fête à la date du jour. Il a fait de sa capti-

tivité une Relation, où il a bien senti que l'art n'étoit point nécessaire pour la rendre touchante. Le sabre toujours levé sur sa tête, la mort toujours présente à ses yeux, des traitemens plus que barbares, qui étoient une mort de tous les momens, feront frémir les plus impitoyables; & l'on aura seulement de la peine à concevoir comment sa jeunesse, sa bonne constitution, son courage, la résignation la plus Chrétienne, ont pu résister à une si affreuse situation. Il se crut heureux d'être acheté par deux Turcs, freres, & très pauvres, avec qui il souffrit encore beaucoup, mais plus par leur misere que par leur cruauté; il comptoit qu'ils lui avoient sauvé la vie. Ces maitres si doux le faisoient enchaîner toutes les nuits à un pieu planté au milieu de leur chétive cabane; & un troisieme Turc, qui vivoit avec eux, étoit chargé de ce soin.

Enfin, car nous supprimons beaucoup de détails, quoiqu'intéressans, il trouva moyen de donner de ses nouvelles en Italie, & de se faire racheter, & le jour de sa liberté fut le 25 Mars 1684, jour de l'Annonciation. Ses réflexions sur ces deux dates de sa captivité & de sa délivrance font la plus remarquable partie de son Eloge, puisqu'elles découvrent en lui un grand fonds de piété. Il conçut, & ce sont ici ses paroles, que dans deux jours où l'auguste Protectrice des Fideles est particulierement honorée, elle lui avoit obtenu deux graces du Ciel, l'une consistoit à le punir salutairement de ses fautes passées,

l'autre à faire cesser la punition.

Remis en liberté, il alla à Bologne se montrer à ses Concitoyens, qui avoient pleuré sa mort, & qui verserent d'autres larmes en le revoyant; & après avoir joüi de toutes les douceurs d'une pareille situation, il retourna à Vienne se présenter à l'Empereur, & reprendre ses emplois militaires. Il fut chargé de fortifier Strigonie, & quelques autres Places, & d'ordonner les travaux nécessaires pour le Siege de Bude, que méditoient les Impériaux. Il eut part à la construction d'un Pont sur le Danube, ce qui lui donna occasion d'observer les ruïnes d'un ancien Pont de Trajan sur ce même Fleuve. Il fut fait Colonel en 1689.

En cette même année, l'Empereur l'envoya deux fois à Rome pour faire part aux Papes Innocent XI & Alexandre VIII, des grands succès des armes Chrétiennes, & des projets formés pour la suite.

Lorsqu'après une longue guerre, funeste aux Chrétiens mêmes qui en remportoient l'avantage, l'Empereur & la République de Venise d'une part, & de l'autre la Porte, vinrent à songer à la Paix, & qu'il fut question d'établir les Limites entre les Etats de ces trois Puissances, le Comte Marsigli fut employé par l'Empereur dans une affaire si importante, & comme un homme de guerre qui connoissoit ce qui fait une bonne Frontiere, & comme un Savant bien instruit des anciennes possessions, & comme un habile Négociateur, qui sauroit faire valoir des

droits.

droits. Se trouvant ſur les confins de la Dalmatie Venitienne, il reconnut à quelque distance de là une Montagne, au pied de laquelle habitoient les deux Turcs, dont il avoit été Eſclave. Il fit demander dans le païs Turc s'ils vivoient encore, & heureuſement pour lui ils ſe retrouverent. Il eut le plaiſir de ſe faire voir à eux environné de Troupes qui lui obéiſſoient, ou le reſpectoient, & le plaiſir encore plus ſenſible de ſoulager leur extrême miſere, & de les combler de préſens. Il crut leur devoir encore ſa rançon, parce que l'argent qu'ils en avoient reçu leur avoit été enlevé par le Commandant Turc, ſous ce prétexte extravagant, que leur Eſclave étoit un fils ou un proche parent du Roi de Pologne, qu'ils auroient dû envoyer au Grand-Seigneur. Il fit encore plus pour eux, perſuadé preſque que c'étoient des Liberateurs généreux, qui pour ſon ſeul intérêt l'avoient tiré des mains des Tartares. L'emploi qu'il avoit pour règler les Limites le mettant à portée d'écrire au Grand-Viſir, il lui demanda pour l'un de ſes deux Turcs un Timariot, bénéfice militaire, & en obtint un beaucoup plus conſiderable que celui qu'il demandoit. Sa générosité fut ſentie par ce Viſir, comme on auroit pu ſouhaiter qu'elle le fût par le premier Miniſtre de la Nation la plus polie, & la plus exercée à la vertu.

Les differentes operations d'une Guerre très vive, ſuivies de toutes celles qui furent néceſſaires pour un règlement de Limites, doivent ſuffire pour occuper un homme tout entier.

tier. Cependant au milieu de tant de tumulte, d'agitation, de fatigues, de périls, M. Marsigli fit presque tout ce qu'auroit pu faire un Savant, qui auroit voyagé tranquillement pour acquérir des connoissances. Les armes à la main, il levoit des Plans, déterminoit des positions par les méthodes Astronomiques, mesuroit la vîtesse des Rivieres, étudioit les Fossiles de chaque Païs, les Mines, les Métaux, les Oiseaux, les Poissons, tout ce qui pouvoit mériter les regards d'un homme qui sait où il les faut porter. Il alloit jusqu'à faire des Epreuves Chimiques, & des Anatomies. Le tems bien ménagé est beaucoup plus long que n'imaginent ceux qui ne savent guere que le perdre. Le métier de la Guerre a des vuides fréquens, & quelquefois considerables, abandonnés ou à une oisiveté entiere, ou à des plaisirs qu'on se rend témoignage d'avoir bien mérités. Ces vuides n'en étoient point pour le Comte Marsigli, il les donnoit à un métier presque aussi noble, à celui de Philosophie & d'Observateur, il les remplissoit comme auroit fait Xénophon. Il amassa un grand Recueil, non-seulement d'Ecrits, de Plans, de Cartes, mais encore de curiosités d'Histoire-Naturelle.

La succession d'Espagne ayant rallumé en 1701 une Guerre qui embrassa l'Europe, l'importante Place de Brisac se rendit par capitulation à feu Mgr le Duc de Bourgogne, le 6 Septembre 1703, après 13 jours de Tranchée ouverte. Le Comte d'Arco y comman-

doit,

doit, & sous lui M. Marsigli, parvenu alors au grade de Général de Bataille. L'Empereur, persuadé que Brisac avoit été en état de se défendre, & qu'une si prompte capitulation s'étoit faite contre les règles, nomma des Juges pour connoitre de cette grande affaire. Ils prononcerent le 4 Fev. 1704 une Sentence, par laquelle le Comte d'Arco étoit condamné à avoir la tête tranchée, ce qui fut exécuté le 18 du même mois, & le Comte Marsigli à *être déposé de tous honneurs & charges, avec la rupture de l'Epée.* Un coup si terrible lui dut faire regretter l'esclavage chez les Tartares.

Il est presque impossible que de pareils coups fassent la même impression sur le coupable, & sur l'innocent ; l'un est terrassé malgré lui-même par le témoignage de sa conscience, l'autre en est soutenu & relevé. Il alla à Vienne pour se jetter aux pieds de l'Empereur, & lui demander la révision du procès ; mais il ne put en huit mois approcher de S. M. I. Grace en effet très difficile à obtenir du Prince le plus juste, à cause des conséquences, ou dangereuses, ou tout au moins desagréables. Il eut donc recours au Public, & remplit l'Europe d'un grand Mémoire imprimé pour sa justification. Par bonheur pour lui, un Anonime, & ce ne fut qu'un Anonime, y répondit, ce qui lui donna lieu de lever jusqu'aux moindres scrupules, que son Apologie auroit pu laisser. Le fond en est, que longtems avant le Siege de Brisac, il avoit représenté très instamment

que

que la Place ne pourroit se défendre, & il le fait voir par les Etats de la Garnison, des Munitions de guerre, &c. Pieces dont on ne lui a pas contesté la vérité. On lui avoit refusé, sous prétexte d'autres besoins, tout ce qu'il avoit demandé de plus nécessaire & de plus indispensable. Il n'étoit point le Commandant, & il n'avoit fait que se ranger à l'avis entierement unanime du Conseil de Guerre. Mais cette grande briéveté, à laquelle nous sommes obligés de réduire ses raisons, lui fait tort, & il vaut mieux nous contenter de dire, que le Public, qui sait si bien faire entendre son jugement sans le prononcer en forme, ne souscrivit pas à celui des Commissaires Impériaux. Les Puissances mêmes alliées de l'Empereur, interessées par conséquent à la conservation de Brisac, reconnurent l'innocence du Comte Marsigli, & la Hollande nommément permit qu'on en rendît témoignage dans des Ecrits qui furent publiés. Parmi tous ces suffrages favorables, nous en avons encore un à compter, qui n'est à la vérité que celui d'un Particulier, mais ce Particulier est M. le Maréchal de Vauban, dont l'autorité auroit pu être opposée, s'il l'eût fallu, à celle de toute l'Europe, comme l'autorité de Caton à celle des Dieux. Sur le fond de toute cette affaire, il parut généralement qu'on avoit voulu au commencement d'une grande Guerre donner un exemple effrayant de sévérité, dont on prévoyoit le besoin dans beaucoup d'autres occasions pareilles; la Morale des Etats se résout pour

de

de si grands interêts à hazarder le sacrifice de quelques Particuliers.

M. Marsigli envoya en 1705, toutes ses Pieces justificatives à l'Académie, comme à un Corps dont il ne vouloit pas perdre l'estime; & il est remarquable dans la Lettre qu'il lui écrivit, qu'après avoir parlé en peu de mots de sa malheureuse situation, il ne pense plus qu'à des projets d'Ouvrages, & les expose assez au long, principalement l'idée qu'il avoit d'établir le véritable cours de la Ligne de Montagnes, qui commence à la Mer noire, va parallelement au Danube jusqu'au Mont St Gothard, & continue jusqu'à la Méditerranée.

Dans l'impression de ses Apologies, il met pour Vignette une espéce de Devise singuliere, qui a rapport à son avanture. C'est une *M*, premiere lettre de son nom, qui porte de part & d'autre entre ses deux jambes les deux tronçons d'une Epée rompue, avec ces mots; *fractus integro.* Eût-il imaginé, eût-il publié cette représentation affligeante, s'il se fût cru flétri; & n'eût-il pas cru l'être, si la voix publique ne l'eût pleinement rassuré?

Il chercha sa consolation dans les Sciences, dont il s'étoit ménagé le secours, sans prévoir qu'il lui dût être un jour si nécessaire. Ce qui n'avoit été pour lui qu'un Lieu de plaisance, devint un Asyle. Il conserva la pratique d'étudier par les voyages, dont il avoit contracté l'habitude, & c'est réellement la meilleure pour l'Histoire-Naturelle, qui étoit son grand objet. Il alla en Suisse, où la Nature

ture se présente sous un aspect si different de tous les autres; & ce Païs l'interessoit particulierement, parce qu'il vouloit faire un Traité de la Structure organique de la Terre, & que les Montagnes sont peut être des especes d'Os de ce grand Corps. Il vint ensuite à Paris, où il ne trouva pas moins dequoi exercer sa curiosité, quoique d'une maniere differente; de là il parcourut la France, & s'arrêta à Marseille pour étudier la Mer.

Etant un jour sur le Port, il reconnut un Galérien Turc, pour être celui qui l'attachoit toutes les nuits au pieu, dont nous avons parlé. Ce Malheureux, frappé d'un effroi mortel, se jetta à ses pieds pour implorer sa misericorde, qui ne devoit consister qu'à ne pas ajouter de nouvelles rigueurs à sa misere présente. M. Marsigli écrivit à M. le Comte de Pontchartrain, pour le prier de demander au Roi la liberté de ce Turc, & elle fut accordée. On le renvoya à Alger, d'où il manda à son Liberateur qu'il avoit obtenu du Bacha des traitemens plus doux pour les Esclaves Chrétiens. Il semble que la Fortune imitât un Auteur de Roman, qui auroit ménagé des rencontres imprévues & singulieres, en faveur des vertus de son Héros.

Le Comte Marsigli fut rappellé de Marseille en 1709, par les ordres du Pape Clément XI, qui dans les conjonctures d'alors crut avoir besoin de Troupes, & lui en donna le commandement; tant l'affaire de Brisac lui avoit laissé une réputation entiere! car la valeur & la capacité les plus réelles n'au-

n'auroient pas suffi, il faut toujours dans de semblables choix compter avec l'opinion des hommes. Quand ce commandement fut fini par le changement des conjonctures, le Pape voulut retenir M. Marsigli auprès de lui, par l'offre des emplois militaires les plus importans dont il disposât, & même, pour n'épargner aucun moyen, par l'offre de la Prélature, qui auroit pu le relever si glorieusement, & le porter à un rang si haut; mais il refusa tout pour aller reprendre en Provence les délicieuses recherches qu'il y avoit commencées. Il en envoya à l'Académie en 1710 une assez ample Relation, dont nous avons rendu compte *, & la belle découverte des Fleurs du Corail y est comprise. Cet Ouvrage a été imprimé à Amsterdam en 1715, sous le titre d'*Histoire Physique de la Mer.* Des affaires domestiques le rappellerent à Bologne; & là il commença l'exécution d'un dessein qu'il méditoit depuis longtems, digne d'un homme accoutumé au grand pendant tout le cours de sa vie.

Entre toutes les Villes d'Italie, Bologne est célébre par rapport aux Sciences, & aux Arts. Elle a une ancienne Université, pareille aux autres de l'Europe; une Académie de Peinture, de Sculpture, & d'Architecture, nommée *Clementine*, parce qu'elle a été établie par Clément XI; enfin une Académie des Sciences, qui s'appelle l'Académie des *Inquiets*, nom assez convenable aux Philosophes modernes, qui n'étant plus fixés par aucune

* V. l'Hist. de 1710. p. 30. 63. 91.

Grand d'Eſpagne, & M. Marſigli, le Roi ne voulut point faire de choix entre eux, & il ordonna que tous deux ſeroient de l'Académie, parce que la premiere place d'Aſſocié Etranger qui vaqueroit, ne ſeroit point remplie. N'eût-il pas ſans héſiter donné la préférence à un homme du mérite & de la dignité du Duc d'Eſcalonne, pour peu qu'il fût reſté de tache au nom de ſon Concurrent, & cette tache n'eût-elle pas été de l'eſpece la plus odieuſe aux yeux de ce grand Prince? M. Marſigli étoit auſſi de la Societé Royale de Londres, & de celle de Montpellier. Ce n'étoit pas un honneur à négliger pour les differentes Académies, que de compter parmi leurs membres le Fondateur d'une Académie.

Elle l'occupoit toujours, & il ſe livroit volontiers à toutes les idées qui lui venoient ſur ce ſujet, quelques ſoins & quelques dépenſes qu'elles demandaſſent. Il mit ſur pied une Imprimerie, qui devoit être fournie non-ſeulement de Caracteres Latins & Grecs, mais encore Hébreux & Arabes, & il fit venir de Hollande des Ouvriers habiles pour les fondre. Il eut des raiſons pour ne pas donner ce grand fonds à l'Inſtitut directement, mais aux Peres Dominicains de Bologne, à condition que tous les Ouvrages qui partiroient de l'Inſtitut ſeroient imprimés en rembourſant ſeulement les frais. Il donna à cette Imprimerie le nom d'Imprimerie de St Thomas d'Aquin, dont il invoquoit la protection pour cet établiſſement, & pour tout l'Inſtitut.

Le

Le Protecteur étoit bien choisi, car St Thomas dans un autre siecle, & dans d'autres circonstances, étoit Descartes. Nous passons sous silence des Processions, où il vouloit que l'on portât huit Bannieres, qui auroient représenté les principaux évenemens de la vie du Saint, & auxquelles on jugea à propos de substituer la Châsse de ses Reliques. La dévotion d'Italie prend assez souvent une forme, qui n'est guere de notre goût d'aujourd'hui.

Ce qui en sera certainement davantage, c'est l'établissement qu'il fit d'un Tronc dans la Chapelle de l'Institut pour le rachat des Chrétiens, & principalement de ses Compatriotes esclaves en Turquie. Il n'oublia rien pour animer cette charité; il se souvenoit de ses malheurs utilement pour les autres Malheureux. Par le même souvenir il ordonna une Procession solemnelle de l'Institut tous les vingt-cinq ans, le jour de l'Annonciation. Ces Fêtes, ces cérémonies, fondées sur la piété, pouvoient aussi avoir une politique sensée & légitime; elles lioient l'Institut à la Religion, & en assuroient la durée.

Il manquoit encore à la Collection d'Histoire-Naturelle, dont l'Institut étoit en possession, quantité de choses des Indes, car ce qui y dominoit c'étoit l'Europe; & il jugea qu'il ne pouvoit avoir promptement ces curiosités, qu'en les allant chercher en Angleterre & en Hollande. Il s'embarqua à Livourne pour Londres, quoique dans un âge déja fort avancé, & il alla de Londres à Amsterdam finir ses savantes emplettes. Là il

il donna à imprimer ſon grand ouvrage du *Cours du Danube*, dont il a paru à la Haye en 1726 une Edition magnifique en 6 vol. in fol. Et il négocia avec les Libraires un nombre de bons Livres deſtinés à ſon Inſtitut. Quand toutes ſes nouvelles acquiſitions furent raſſemblées dans Bologne, il en fit la donation en 1727.

Tout cela fini, tous ſes projets heureuſement terminés, il imita en quelque ſorte Solon, qui après avoir été le Légiſlateur de ſon Païs, & n'ayant plus de bien à lui faire, s'en exila. Il alla en 1728 retrouver ſa retraite de Provence, pour y reprendre ſes recherches de la Mer, & ſuivre en liberté ce génie d'obſervation qui le poſſedoit. Mais il eut en 1729 une légere attaque d'Apoplexie, & les Médecins le renvoyerent dans l'air natal. Il ne fit qu'y languir juſqu'au 1 Nov. 1730. qu'une ſeconde attaque l'emporta. Tout Bologne fit parfaitement ſon devoir pour un pareil Citoyen, qui, à l'exemple des anciens Romains, avoit uni en même degré les Lettres & les Armes, & donné tant de preuves d'un amour ſingulier pour ſa Patrie.

MEMOI-

AVIS AU RELIEUR.

Le Relieur aura ſoin de conſerver le papier blanc qui eſt à côté des Figures, afin de les faire déborder hors du Livre.

AAN DEN BOEKBINDER.

De Boekbinder zy gewaarſchouwt het papier ter zyde de Figuuren niet af te ſnyden, maar zodaanig in te zetten, datze buiten het Boek uitſlaan.

MEMOIRES

DE

MATHEMATIQUE

ET

DE PHYSIQUE,

TIRÉS DES REGISTRES de l'Académie Royale des Sciences,

De l'Année M. DCCXXX.

OBSERVATIONS METEOROLOGIQUES FAITES A AIX

Par M. DE MONTVALON, *Conseiller au Parlement d'Aix. Comparées avec celles qui ont été faites à Paris.*

Par M. CASSINI.

Observations sur la quantité de Pluye de l'année 1729.

	A Paris.	A Aix.
EN Janvier....	13 lignes $\frac{1}{2}$	10 lignes $\frac{15}{24}$
Février...	5 $\frac{4}{6}$	8 $\frac{16}{24}$
Mars.....	8 $\frac{1}{6}$	5 $\frac{1}{24}$

	A Paris.	A Aix.
En Avril.......	19 lignes $\frac{5}{6}$	24 lignes $\frac{1}{24}$
Mai........	43 $\frac{5}{6}$	18 $\frac{11}{24}$
Juin........	8 $\frac{5}{6}$	24 $\frac{1}{2}$
Juillet......	22 $\frac{1}{6}$	4 $\frac{13}{24}$
Août......	28 $\frac{3}{6}$	2 $\frac{12}{24}$
Septembre...	20	14 $\frac{9}{24}$
Octobre....	13 $\frac{2}{6}$	19 $\frac{1}{2}$
Novembre...	8 $\frac{2}{6}$	73 $\frac{2}{3}$
Decembre...	12 $\frac{1}{6}$	13 $\frac{4}{24}$

Somme totale de la Pluye tombée en l'année 1719 à Paris... 204 lign. $\frac{2}{6}$ à Aix... 219 lign. $\frac{1}{6}$
ou 17 pouces $\frac{2}{6}$ ou 18 pouc. 3 lign. $\frac{2}{3}$

En comparant ensemble ces Observations, on trouve que la quantité de Pluye qui est tombée à Aix est plus grande de 15 lignes que celle que l'on a observée à Paris; on voit aussi que cette quantité de Pluye a été distribuée bien inégalement dans chaque mois, puisqu'il en est tombé pendant le mois de Mai à Paris 43 lignes $\frac{5}{6}$, & à Aix 18 lign. $\frac{11}{24}$, au mois d'Août à Paris 28 lignes $\frac{1}{2}$, & à Aix 2 lignes $\frac{1}{2}$, au lieu qu'au mois de Novembre il en est tombé à Paris 8 lign. $\frac{2}{6}$, & à Aix 73 lign. $\frac{2}{3}$.

Il paroît aussi que quoique la quantité de Pluye ait été en 1729 de même qu'en 1728 plus grande à Aix qu'à Paris, elle n'a pas gardé la même proportion que l'année précédente, où il a plu à Aix 24 pouces 9 lignes $\frac{1}{2}$, 8 pouces 8 lignes plus qu'à Paris.

On

Observations sur le Thermometre.

Le plus grand froid eſt arrivé à Aix le 9 Janvier, le Thermometre étant deſcendu à 13 degrés $\frac{1}{2}$, qui répondent à 17 degrés $\frac{1}{2}$ du Thermometre de l'Obſervatoire.

A Paris le plus grand froid le 20 Janvier, le Thermometre étant deſcendu à 9 degrés $\frac{3}{4}$, c'eſt-à-dire, 8 degrés ou environ plus bas que le 9 Janvier à Aix.

La plus grande chaleur eſt arrivée le 20 Juillet à 3 heures après midi, le Thermometre étant monté à 81 degrés, que M. de Montvalon juge répondre à 80 degrés de celui de Paris.

A Paris le plus grand chaud eſt arrivé le 18 Juin à 3 heures après midi, où l'on obſerva le Thermometre à 78 degrés, plus bas ſeulement de 2 degrés que le 20 Juillet à Aix.

Sur le Barometre.

La plus grande hauteur du Barometre a été obſervée à Aix le 31 Decembre de 27 pouces 10 lignes, après une grande pluye; plus baſſe de 6 lignes qu'à Paris, où il a été obſervé le 6 Fevrier à 28 pouces 4 lignes.

La moindre hauteur a été à Aix le 21 Novembre à 26 pouces 11 lignes, plus baſſe de 2 lignes $\frac{1}{2}$ qu'à Paris, où il eſt deſcendu le 22 Fevrier à 27 pouces 1 ligne $\frac{1}{2}$ par un vent de Sud-oueſt couvert.

Sur la Déclinaison de l'Aimant.

La déclinaison de l'Aimant a été observée à Aix de . . . . 14^d 0'.

Elle a été observée à Marseille par le P. Pesenas, Professeur d'Hydrographie, de. 14 50.

MEMOIRE

Sur le Crystallin de l'Oeil de l'Homme, des Animaux à quatre pieds, des Oiseaux & des Poissons.

Par M. PETIT le Médecin. *

LE Crystallin est une partie transparente de l'Oeil, de figure lenticulaire, d'une substance molle, mucilagineuse, mais assez ferme pour se contenir dans ses propres bornes, enchassée dans la partie antérieure de l'Humeur vitrée comme un Diamant dans son Chaton, dans laquelle il est retenu par une Membrane qui l'envelope entierement, & qui pour cela est appellée la *Capsule du Crystallin*.

L'on sait que le nom de Crystallin ne lui a été donné que parce qu'il est transparent comme un morceau de Crystal: c'est apparemment à cause de cette transparence que les Anatomistes l'ont mis au nombre des Humeurs des Yeux, quoique les parties qui le composent ne soient point fluides.

Sa

* 18 Janvier 1730.

Sa ſubſtance eſt d'une conſiſtance moyenne entre la fermeté & la liquidité; ſes parties ne ſe dérangent point par elles-mêmes les unes à l'égard des autres.

Il eſt d'une forme lenticulaire dans l'Homme, les Animaux à quatre pieds & les Oiſeaux. Il eſt ſphérique, à peu de choſe près, dans preſque tous les Poiſſons & les Serpens; il eſt plus applati dans l'Homme & dans le Singe que dans aucun autre animal, parce qu'il a moins de convexité dans ſes ſurfaces, ſur-tout à ſa partie antérieure.

La circonference du Cryſtallin eſt ordinairement ronde; j'en ai pourtant trouvé dans l'Homme qui ne l'étoient pas, & dont le diametre étoit plus grand d'un quart de ligne d'un côté que de l'autre.

Le diametre de la circonference du Cryſtallin dans l'Homme a pour l'ordinaire 4 lignes, quelquefois 4. lign. $\frac{1}{4}$ & 4 lign. $\frac{1}{2}$; je l'ai vu rarement de 3 lign. $\frac{3}{4}$ dans les Adultes, mais je l'ai ſouvent trouvé de 3 lign. $\frac{1}{2}$ dans les Enfans.

Son épaiſſeur eſt de 2 lignes & 2 lign. $\frac{1}{4}$ dans les Adultes, quelquefois d'une ligne $\frac{3}{4}$, mais dans les Enfans on le trouve de 2 lign. $\frac{1}{2}$.

La convexité antérieure du Cryſtallin dans l'Homme fait une portion de ſphere dont le diametre eſt de 6 lign. 6 lign. $\frac{1}{2}$, juſqu'à 9 lignes, & quelquefois de 12 lignes; j'en ai même trouvé dans des gens âgés qui étoient preſque plans à leur partie antérieure de la longueur de 2 lignes, & dont la convexité me paroiſſoit être une portion de ſphere de 25 à 30 lign. de diametre: cela eſt bien extraor-

dinaire. On en trouve aussi qui n'ont que 5 lign. $\frac{1}{2}$, mais rarement, à moins que ce ne soit dans quelques Enfans.

La convexité postérieure fait une portion de sphere dont le diametre est de 5 lign. rarement de 5 lign. $\frac{1}{2}$ & de 4 lign. $\frac{3}{4}$, à moins que ce ne soit des Crystallins d'Enfans.

J'ai trouvé des Crystallins dont les deux convexités étoient égales. J'en ai vu aussi de plus convexes à la partie antérieure qu'à la partie postérieure, & j'ai rencontré plus d'une fois, dans les Yeux du même Homme, un Crystallin plus convexe à sa partie antérieure qu'à la partie postérieure, l'autre Crystallin étant dans son état naturel.

J'ai aussi trouvé quelques Crystallins dont la convexité postérieure n'étoit point sphérique, mais elle approchoit de la figure parabolique. *

Le Crystallin de l'Homme pese 4 grains, dans les Adultes, quelquefois 4 grains $\frac{1}{4}$, rarement 4 grains $\frac{1}{2}$ & 3 grains $\frac{3}{4}$. Je l'ai trouvé dans les Enfans de huit ou dix ans pesant 3 grains, jusqu'à 3 grains $\frac{1}{4}$.

Il pesoit un grain $\frac{1}{2}$ dans un Fœtus de sept mois, il n'avoit que 2 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & une ligne $\frac{3}{4}$ d'épaisseur. Sa convexité antérieure faisoit la portion d'une sphere de 3 lignes de diametre, & la postérieure étoit de 2 lign. $\frac{1}{2}$.

Le Crystallin pesoit 2 grains dans un Fœtus de neuf mois. Il avoit 2 lign. $\frac{3}{4}$ de diametre & 2 lignes d'épaisseur, & les mêmes convexités que le précédent.

Ce-

* *V. les Mem. de 1725. p. 20.*

	Nombre.	Age.
	1.	12.
	2.	15.
	3.	15.
	4.	20.
	5.	25.
Cryſtallins du même Homme.	6.	30.
	7.	30.
	8.	30.
	9.	30.
	10.	35.
Cryſtallins du même Homme.	11.	40.
	12.	40.
	13.	40.
	14.	45.
	15.	45.
	16.	50.
	17.	50.
	18.	55.
	19.	55.
	20.	60.
	21.	60.
	22.	60.
	23.	60.
	24.	60.
	25.	60.
	26.	65.

i d'un Enfant de huit jours de naissan-
oit 2 grains. Il avoit 2 lign. ¾ de diame-
& 2 lignes d'épaisseur. Sa convexité an-
re faisoit une portion de sphere de 4 lign.
ametre, & la postérieure de 3 lignes.
elui d'un Enfant de neuf jours de naissan-
esoit 2 grains ¼. Il avoit 3 lignes de dia-
tre, & 2 lign. ¼ d'épaisseur. Sa convexité
térieure faisoit la portion d'une sphere de
lignes, & la postérieure de 3 lign. ½.

Il faut remarquer que le diametre du Crys-
llin n'est pas toujours proportionné à son
paisseur. J'ai trouvé des Crystallins qui a-
voient 4 lignes de diametre & une ligne ¾ d'é-
paisseur, d'autres 2 lignes, d'autres 2 lign. ¼,
jusqu'à 2 lign. ½. J'en ai trouvé avec 2 lignes
d'épaisseur, qui avoient 3 lign. ¾ de diametre,
4 lignes, 4 lign. ¼, 4 lign. ¼ & 4 lign. ½. J'ai
vu dans un Homme de quarante ans les deux
Crystallins de differens diametres.

Les convexités des Crystallins ne sont pas toujours proportionnées à l'âge, elles diminuent pour l'ordinaire à mesure que l'on avance en âge, ce qui dépend de la contraction des Muscles, comme nous le dirons dans un Mémoire particulier. Les Crystallins se trouvent quelquefois aussi convexes dans un homme âgé que dans un jeune homme. Leur grosseur ne s'accorde pas toujours avec leur pesanteur; ils sont d'autant plus pesans qu'ils sont fermes, quoique de même grosseur.

On peut voir toutes ces diversités dans la Table suivante, je les ai tirées d'un grand nombre d'Yeux que j'ai examinés.

L'on voit dans cette Table des Cryſtallins de même âge avoir differens diametres & differentes épaiſſeurs.

Il y a des gens âgés de 60 ans qui ont la même épaiſſeur du Cryſtallin que des jeunes gens âgés de 12, de 15, de 30, de 40 ans, avec les mêmes convexités.

On voit des convexités differentes avec la même épaiſſeur & la même largeur. Et dans un homme âgé de 30 ans & un autre de 40, on y trouve ſes deux Cryſtallins de differentes convexités, de differens diametres & de differentes peſanteurs.

Il eſt bon d'avertir ici que les âges ont été déterminés ſur la ſimple vue du Cadavre, ce qui eſt ſujet à quelque erreur, mais qui n'eſt pas de conſéquence. Il eſt preſque impoſſible de ſavoir l'âge de ceux qui meurent dans les Hôpitaux, principalement après leur décès, & lorſqu'ils ſont une fois dans la Salle des Morts.

Le Singe eſt de tous les Animaux celui dont les parties approchent le plus de celles de l'Homme. Ses Yeux ſont tout ſemblables à ceux de l'Homme; ſon Cryſtallin a les mêmes convexités, peu s'en faut; il n'a pourtant que 3 lign. $\frac{1}{4}$ de largeur, juſqu'à 3 lign. $\frac{1}{2}$, & une ligne $\frac{1}{2}$ d'épaiſſeur, juſqu'à une ligne $\frac{3}{4}$.

La convexité antériere du Cryſtallin du Cheval fait une portion de ſphere dont le diametre a 12 lignes, juſqu'à 15. La convexité poſtérieure fait une portion de ſphere qui a 10 lignes, juſqu'à 11 lignes de diametre.

Le diametre ou la largeur de ce Cryſtallin eſt

enc. 1730. p. 9

eur.	Pesanteur.
es 1/2.	38 grains.
1/2.	38 gr.
.	38 gr.
3/4.	41 gr.
1/2.	41 gr.
1/2.	42 gr. 1/2.
2/3.	43 gr. 1/2.
1/3.	44 gr.
1/2.	44 gr.
1/3.	44 gr.
1/2.	44 gr.
.	44 gr. 1/2.
1/2.	45 gr.
1/2.	45 gr.
1/2.	46 gr.
	46 gr.
	47 gr.
2/3.	47 gr.
1/2.	47 gr.
2/3.	47 gr.
1/4.	47 gr. 1/2.
1/2.	48 gr.
2/3.	48 gr.
1/2.	48 gr.
2/3.	49 gr.
2/3.	49 gr.
3/4.	49 gr. 1/2.
1/2.	50 gr.
3/4.	50 gr.
3/4.	50 gr.
	50 gr.
2/3.	50 gr.
2/3.	51 gr.
1/2.	51 gr.
3/4.	51 gr.
1/2.	56 gr.

est de 9 lignes, jusqu'à 10. Il a 6 lignes d'épaisseur, jusqu'à 6 lign. $\frac{1}{2}$. Il pese 58 grains, jusqu'à 66.

La convexité de la partie antérieure du Crystallin de l'Oeil du Bœuf fait une portion de sphere dont le diametre est de 10, 11, 12 lignes, jusqu'à 12 lign. $\frac{1}{2}$. La convexité de la partie postérieure fait une portion de sphere dont le diametre est de 8 lign. $\frac{1}{2}$, jusqu'à 9 $\frac{1}{2}$, rarement de 9 lign. $\frac{3}{4}$ & de 8 lign.

La largeur ou le diametre de ce Crystallin est de 8 lignes, jusqu'à 8 lign. $\frac{1}{2}$, rarement de 8 lign. $\frac{3}{4}$. Son épaisseur est de 5 lign. $\frac{1}{4}$, jusqu'à 6 lign. $\frac{1}{2}$. Sa pesanteur est de 38 grains, jusqu'à 54 ; j'en ai trouvé de 58 grains, mais très rarement.

La facilité que l'on a d'avoir des Crystallins de Bœuf, est cause que j'en ai examiné une très grande quantité, sur lesquels j'ai choisi un certain nombre pour faire la Table suivante, où l'on peut voir la plupart des varietés que nous avons remarquées dans les Crystallins de l'Homme, car l'on y voit que la largeur du Crystallin n'y est pas toujours proportionnée à son épaisseur, & que leur grosseur ne s'accorde pas toujours avec leur pesanteur : il y en a quelques-uns dont je n'ai pas examiné les convexités.

La convexité de la partie antérieure du Cryſtallin du Mouton fait une portion de ſphere dont le diametre eſt de 7 lign. ½, juſqu'à 8 lignes. Sa convexité poſtérieure fait une portion de ſphere, dont le diametre eſt de 6 lignes, juſqu'à 7.

La largeur ou le diametre eſt de 5 lign. ½, juſqu'à 6 lign. ½. Son épaiſſeur eſt de 4 lign. ½, juſqu'à 4 lign. ¾. Il peſe pour l'ordinaire 24 grains, juſqu'à 28.

La convexité de la partie antérieure du Cryſtallin de l'Oeil du Chien-dogue & de trois ou quatre Loups que j'ai diſſéqués, fait la portion d'une ſphere, dont le diametre eſt de 6 lignes, juſqu'à 6 lign. ½. La convexité de la partie poſtérieure eſt quelquefois égale à l'antérieure, mais pour l'ordinaire elle fait la portion d'une ſphere, dont le diametre eſt de 5 lignes, juſqu'à 5 lign. ½.

La largeur de ce Cryſtallin eſt de 4 lign. ½, juſqu'à 5 lign. & 3 lign. ½ d'épaiſſeur, juſqu'à 3 lign. ¾. Il peſe 12 grains, juſqu'à 14.

Les Cryſtallins des Yeux des gros Chats ne différent preſque point de ceux du Chien & du Loup.

J'ai diſſéqué les Yeux d'un ſeul Renard, la convexité de la partie antérieure de ſes Cryſtallins faiſoit la portion d'une ſphere de 6 lign. ½ de diametre, & la convexité poſtérieure faiſoit la portion d'une ſphere de 5 lign. ½ de diametre.

Ils avoient 5 lign. ¼ de largeur, & 4 lignes d'épaiſſeur. Ils peſoient chacun 12 grains.

On trouve preſque toujours la convexité de la partie antérieure du Cryſtallin de l'Oeil du

du Lievre & du Lapin égale à la postérieure, elle fait la portion d'une sphere, dont le diametre est de 6 jusqu'à 7 lignes.

La largeur de ce Crystallin est de 5 lign. 5 lign. $\frac{1}{2}$, jusqu'à 6, & son épaisseur est de 4 lign. $\frac{1}{4}$, jusqu'à 4 lign. $\frac{1}{2}$.

La convexité de la partie antérieure du Crystallin des Yeux du Dindon & de l'Oye est la même; elle fait la portion d'une sphere, dont le diametre est de 4 lign. $\frac{1}{2}$ ou 5 lignes, assez souvent de 6 lignes, rarement de 7 lignes.

La convexité de la partie postérieure fait la portion d'une sphere, dont le diametre est de 4 lignes, jusqu'à 5 lignes.

Ces Crystallins ont 3 lign. $\frac{1}{2}$ de largeur, jusqu'à 4 lignes, & 2 lign. jusqu'à 2 lign. $\frac{1}{2}$ d'épaisseur. Ils pesent 3 grains, 3 grains $\frac{1}{2}$ jusqu'à 4 grains $\frac{1}{2}$.

Le Chat-huant, le Duc & la Chouette ont le Crystallin de la même conformation, aussi-bien que tout le globe de l'Oeil, qui est d'une structure particuliere, comme je l'ai fait voir à l'Académie. La convexité de la partie antérieure du Crystallin est plus grande que la postérieure, car cette partie antérieure fait la portion d'une sphere qui a 6 lignes de diametre. La convexité postérieure fait la portion d'une sphere qui a 7 lign. de diametre.

Il a 6 lign. $\frac{1}{2}$ de largeur, & 5 lign. d'épaisseur.

Il pese 14 grains, ce qui est digne de remarque, qu'un si petit Oiseau ait un Crystallin aussi gros & aussi pesant, en comparaison de

de ceux du Dindon & de l'Oye, dont les plus gros Cryſtallins n'ont que 4 lign. de diametre, & 4 grains ½ de peſanteur.

Le Cryſtallin de la Chouette eſt plus petit que celui du Chat-huant & du Duc, il n'avoit que 4 lign. ¾ de largeur, & 3 lign. ½ d'épaiſſeur, & peſoit 10 grains.

Les Cryſtallins de la plupart des Serpens & des Poiſſons ſont à peu près ſphériques.

La convexité de la partie antérieure du Cryſtallin d'un Marſouin long de 5 pieds, faiſoit la portion d'une ſphere de 8 lignes de diametre, & la convexité de la partie poſtérieure faiſoit la portion d'une ſphere de 6 lign. ½ de diametre.

Ce Cryſtallin avoit 6 lignes de diametre dans ſa circonference, & 5 lignes d'axe ou d'épaiſſeur: il peſoit 24 grains.

Le Cryſtallin d'un Marſouin, de 4 pieds ½ de longueur, faiſoit à ſa partie antérieure la portion d'une ſphere de 7 lign. ½ de diametre, & la poſtérieure de 6 lignes.

Ce Cryſtallin avoit 5 lign. ½ de largeur ou de diametre de ſa circonference, & 4 lign. ¾ d'axe ou d'épaiſſeur: il peſoit 22 grains.

Le Cryſtallin d'un Marſouin, long de 3 pieds ½, faiſoit à ſa partie antérieure la portion d'une ſphere de 7 lign. de diametre, & la poſtérieure 5 lign. ½. Il avoit 5 lignes de largeur ou de diametre de ſa circonference, & 4 lignes ½ d'épaiſſeur. Il peſoit 19 grains.

Un Poiſſon appellé *Carpe de Mer*, long de 6 pieds, ſon Cryſtallin faiſoit une portion de ſphere de 9 lignes de diametre par ſa convexi-

vexité antérieure, & par la postérieure elle étoit de 7 lignes.

Le diametre de sa circonference étoit de 6 lign. $\frac{3}{4}$, & son épaisseur de 6 lign. $\frac{1}{4}$: il pesoit 28 grains.

Le Crystallin d'un Poisson nommé *Reluisant*, long de 7 pieds, faisoit à sa partie antérieure une portion de sphere de 10 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la postérieure de 9 lign. $\frac{1}{2}$. Il avoit 9 lign. $\frac{1}{2}$ de largeur ou de diametre de sa circonference, & 9 lign. d'axe ou d'épaisseur. Il pesoit 111 grains.

Le Crystallin d'un Poisson appellé *Negre*, long de 4 pieds, avoit une convexité à sa partie antérieure qui faisoit une portion de sphere de 7 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la postérieure de 6 lign. $\frac{1}{2}$. Il avoit 6 lign. $\frac{1}{2}$ de largeur ou de diametre de sa circonference, & 6 lign. $\frac{1}{4}$ d'axe ou d'épaisseur. Il pesoit 32 grains.

Le Crystallin d'un autre Negre, qui avoit 4 pieds $\frac{1}{2}$ de longueur, faisoit par sa convexité antérieure une portion de sphere qui avoit 8 lign. de diametre, & la postérieure 6 lign. $\frac{3}{4}$. Il avoit 6 lign. $\frac{3}{4}$ de largeur ou de diametre de sa circonference, & 6 lign. $\frac{1}{2}$ d'épaisseur. Il pesoit 36 grains.

Le Crystallin d'un Saumon, qui avoit 2 pieds de longueur, avoit à sa partie antérieure une convexité qui faisoit la portion d'une sphere de 3 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la postérieure de 2 lign. $\frac{1}{2}$. Il avoit 2 lign. $\frac{1}{2}$ de largeur ou de diametre de sa circonference, & 2 lign. $\frac{1}{4}$ d'épaisseur. Il pesoit 2 grains.

Le Crystallin d'un Espadon (*Gladius sive Xiphias*)

Xiphias) long de 3 pieds, faifoit par fa convexité antérieure la portion d'une fphere qui avoit 10 lignes de diametre, & la poftérieure 8 lignes $\frac{2}{3}$. Il avoit 8 lignes $\frac{2}{3}$ de largeur ou de diametre de fa circonference, & 8 lign. $\frac{1}{2}$ d'épaiffeur. Il pefoit 72 grains.

Le Cryftallin d'une Aloze, longue de 21 pouces, faifoit par fa convexité antérieure une portion de fphere qui avoit 4 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, la partie poftérieure 3 lign. $\frac{3}{4}$. Il avoit 3 lign. $\frac{3}{4}$ de largeur ou de diametre de fa circonference, & 3 lign. $\frac{1}{3}$ d'épaiffeur. Il pefoit 3 grains $\frac{1}{2}$.

Le Cryftallin d'une autre Aloze, de 14 pouces de longueur, faifoit par fa partie antérieure une portion de fphere de 4 lign. de diametre, & la poftérieure de 3 lignes. Il avoit 3 lignes de largeur ou de diametre de fa circonference, & 2 lign. $\frac{1}{2}$ d'épaiffeur. Il pefoit 3 grains.

Le Cryftallin d'un Poiffon appellé *Pucelle*, long de 14 pouc. faifoit par fa convexité antérieure une portion de fphere qui avoit 3 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la poftérieure 2 lign. $\frac{3}{4}$. Il avoit 2 lign. $\frac{3}{4}$ de largeur ou de diametre de fa circonference, & 2 lign. $\frac{1}{2}$ d'axe ou d'épaiffeur. Il pefoit 2 grains $\frac{3}{4}$.

Le Cryftallin d'un Brochet, de 2 pieds de longueur, faifoit par fa convexité antérieure une portion de fphere de 4 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la poftérieure de 3 lign. $\frac{3}{4}$. Il avoit 3 lign. $\frac{3}{4}$ de largeur ou de diametre de fa circonference, & 3 lign. $\frac{1}{3}$ d'épaiffeur. Il pefoit 6 grains.

Le

Le Cryſtallin d'un Brochet, de 32 pouces de longueur, avoit les mêmes dimenſions & le même poids.

Le Cryſtallin d'un Barbeau ou Barbillon, qui avoit 18 pouces de longueur, faiſoit par ſa convexité antérieure une portion de ſphere qui avoit 4 lignes de diametre, & la poſtérieure 3 lignes. Il avoit 3 lignes de largeur ou de diametre de ſa circonference, & 2 lign. $\frac{3}{4}$ d'axe ou d'épaiſſeur. Il peſoit 4 grains.

Le Cryſtallin d'un autre Barbeau, qui avoit 2 pieds de longueur, faiſoit par ſa convexité antérieure une portion de ſphere qui avoit 5 lign. de diametre, & la poſtérieure 3 lign. $\frac{3}{4}$. Il avoit 3 lign. $\frac{3}{4}$ de largeur ou de diametre de ſa circonference, & 3 lignes d'axe ou d'épaiſſeur. Il peſoit 6 grains.

Le Cryſtallin d'une Carpe, qui avoit 15 pouces de longueur, faiſoit par ſa convexité antérieure une portion de ſphere qui avoit 3 lignes de diametre, & la poſtérieure 2 lign. $\frac{1}{2}$. Il avoit 2 lign. $\frac{1}{2}$ de largeur ou de diametre de ſa circonference, & 2 lign. $\frac{1}{3}$ d'axe ou d'épaiſſeur. Il peſoit 2 grains $\frac{1}{2}$.

Le Cryſtallin d'un Maquereau, qui avoit 14 pouces de longueur, faiſoit par ſa convexité antérieure une portion de ſphere qui avoit 4 lign. de diametre, & la poſtérieure 3 lign. $\frac{1}{4}$. Il avoit 3 lign. $\frac{1}{4}$ de largeur ou de diametre de ſa circonference, & 3 lignes d'axe ou d'épaiſſeur. Il peſoit 2 grains $\frac{3}{4}$.

Le Cryſtallin d'un autre Maquereau, de 14 pouces de longueur, faiſoit par ſa convexi-

vexité antérieure une portion de ſphere de 4 lign. $\frac{1}{3}$ de diametre, & la poſtérieure de 3 lign. $\frac{1}{2}$. Il avoit 3 lign. $\frac{1}{2}$ de largeur ou de diametre de ſa circonference, & 3 lign. $\frac{1}{8}$ d'axe ou d'épaiſſeur. Il peſoit 3 grains $\frac{1}{4}$.

Le Cryſtallin d'un autre Maquereau, de 13 pouces de longueur, faiſoit par ſa convexite antérieure la portion d'une ſphere qui avoit 3 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la poſtérieure 2 lign. $\frac{2}{3}$. Il avoit 2 lign. $\frac{2}{3}$ de largeur ou de diametre de ſa circonference, & 2 lign. $\frac{1}{2}$ d'axe ou d'épaiſſeur. Il peſoit 2 grains.

Le Cryſtallin d'un Merlan, qui avoit 12 pouces de longueur, faiſoit par ſa convexité antérieure une portion de ſphere qui avoit 4 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la poſtérieure 3 lignes $\frac{3}{4}$. Il avoit 3 lign. $\frac{3}{4}$ de largeur ou de diametre de ſa circonference, & 3 lign. $\frac{1}{2}$ d'axe ou d'épaiſſeur. Il peſoit 3 grains $\frac{1}{4}$.

Le Cryſtallin d'un autre Merlan, de 12 pouces de longueur, faiſoit par ſa convexité antérieure une portion de ſphere qui avoit 5 lignes de diametre, & la poſtérieure 4 lignes. Il avoit 4 lignes de largeur ou de diametre de ſa circonference, & 3 lign. $\frac{1}{2}$ d'épaiſſeur. Il peſoit 4 grains.

Le Cryſtallin d'un Chien de Mer, qui avoit 3 pieds 3 pouces de longueur, faiſoit par ſa convexité antérieure une portion de ſphere qui avoit 6 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la poſtérieure 5 lign. $\frac{1}{2}$. Il avoit 5 lign. $\frac{1}{2}$ de largeur ou de diametre de ſa circonference, & 5 lign. $\frac{1}{4}$ d'épaiſſeur. Il peſoit 18 grains.

Le Cryſtallin d'un autre Chien de Mer, long

long de 2 pieds ½, faisoit par sa convexité antérieure une portion de sphere qui avoit 5 lign. ½ de diametre, & la postérieure 5 lignes. Il avoit 5 lignes de largeur ou de diametre de sa circonference, & 4 lign. ¾ d'axe ou d'épaisseur. Il pesoit 16 grains.

Le Crystallin d'une Raye appellée *Ange*, longue d'un pied ½ sans la queue, faisoit par sa convexité antérieure une portion de sphere qui avoit 5 lign. ½ de diametre, & la postérieure 4 lign. ½. Il avoit 4 lign. ½ de largeur ou de diametre de sa circonference, & 4 lign. ¼ d'axe ou d'épaisseur. Il pesoit 17 grains.

Le Crystallin d'une autre Raye appellée *Bouclée*, longue de 2 pieds sans la queue, faisoit par sa convexité antérieure une portion de sphere de 6 lign. ¼ de diametre, & la postérieure de 5 lign. ½. Il avoit 5 lign. ½ de largeur ou de diametre de sa circonference, & 5 lign. ¼ d'épaisseur ou d'axe. Il pesoit 18 grains.

Le Crystallin d'un Rouget, qui avoit 10 pouces de longueur, faisoit par sa convexité antérieure une portion de sphere de 5 lignes de diametre, & la postérieure de 4 lignes. Il avoit 4 lignes de largeur ou de diametre de sa circonference, & 3 lign. ¾ d'axe ou d'épaisseur. Il pesoit 8 grains ½.

Le Crystallin d'un Hareng faisoit par sa convexité antérieure une portion de sphere de 3 lign. ½ de diametre, & la postérieure de 2 lign. ¾ de largeur ou de diametre, &

2 lign. ½ d'épaiſſeur. Il peſoit 2 grains.

Le Criſtallin d'un autre Hareng faiſoit par ſa convexité antérieure une portion de ſphere de 3 lignes de diametre, & la poſtérieure de 2 lign. ½. Il avoit 2 lign. ½ de largeur ou de diametre de ſa circonference, & 2 lign. ⅓ d'épaiſſeur. Il peſoit un grain ½.

Le Cryſtallin d'une Tanche faiſoit par ſa convexité antérieure une portion de ſphere qui avoit 2 lign. ¾ de diametre, & la poſtérieure de 2 lignes. Il avoit 2 lignes de largeur, & une ligne ¾ d'épaiſſeur. Il peſoit un grain.

Le Cryſtallin d'une Anguille d'eau douce faiſoit par ſa convexité antérieure une portion de ſphere qui avoit 3 lign. ½ de diametre, & la poſtérieure 3 lignes. Il avoit 3 lignes de largeur ou de diametre de ſa circonference, & 2 lign. ¾ d'axe ou d'épaiſſeur. Il peſoit 3 grains.

Le Cryſtallin d'une Anguille de Mer faiſoit par ſa convexité antérieure une portion de ſphere de 6 lign. ½ de diametre, & la poſtérieure de 5 lignes. Il avoit 5 lignes de largeur ou de diametre de ſa circonference, & 4 lign. ½ d'épaiſſeur. Il peſoit 14 grains.

Le Cryſtallin d'une Lamproye étoit tout ſemblable à celui de l'Anguille d'eau douce.

Le Cryſtallin d'une Lote faiſoit par ſa convexité antérieure la portion d'une ſphere de 3 lign. ½ de diametre, & la poſtérieure d'une ligne ¾. Il avoit une ligne ¾ de largeur ou de diametre de ſa circonference, & une ligne ½ d'é-

d'épaisseur. Il pesoit $\frac{3}{4}$ de grain.

J'ai trouvé dans les Crystallins de la plupart des Viperes & des Aspics les mêmes dimensions & les mêmes poids.

Le Crystallin d'une Loutre, que j'ai disséquée, faisoit par sa convexité antérieure la portion d'une sphere qui avoit 3 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la postérieure 2 lign. $\frac{1}{2}$. Il avoit 2 lign. $\frac{1}{2}$ de largeur ou de diametre de sa circonference, & 2 lignes d'axe ou d'épaisseur. Il pesoit un grain $\frac{1}{2}$.

Le Crystallin d'une Tortue, qui avoit 2 pieds $\frac{1}{2}$ de longueur, sans y comprendre la tête ni la queue, faisoit par sa convexité antérieure la portion d'une sphere qui avoit 3 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre & la postérieure 2 lign. $\frac{1}{4}$. Il avoit de largeur ou de diametre de sa circonference 2 lign. $\frac{1}{4}$, & une ligne $\frac{3}{4}$ d'axe ou d'épaisseur. Il pesoit 2 grains.

Le Crystallin d'une grosse Grenouille faisoit par sa convexité antérieure une portion de sphere qui avoit 2 lign. $\frac{1}{4}$ de diametre, & la postérieure 2 lignes. Il avoit de largeur ou de diametre de sa circonference 2 lignes, & une ligne $\frac{1}{4}$ d'épaisseur. Il pesoit un grain $\frac{1}{2}$.

Le Crystallin d'une moyenne Grenouille ne pesoit qu'un grain, & avoit les dimensions plus petites.

* Il faut encore remarquer que plus les Animaux sont jeunes, le Crystallin se trouve d'autant plus mou. Il est d'une mollesse qui ressemble à celle de la bouillie refroidie, dans les Fœtus & les nouveau-nés; il est même

* *Morgagni Advers. 6. p. 90.*

plus mou au centre qu'à la circonference, ce qu'il eſt facile de remarquer dans les Cryſtallins de Veaux & d'Agneaux.

Si l'on fait ſecher ces Cryſtallins, il s'en évapore les deux tiers ou les trois quarts, & l'on trouve une cavité au dedans, ou bien il ſe fait un enfoncement ſur l'une des deux ſurfaces, quelquefois ſur toutes les deux ; la même choſe arrive aux Cryſtallins d'Enfans nouveau-nés : mais ſi l'on met ſecher des Cryſtallins d'Hommes de l'âge de 50 à 60 ans, il ne ſe fait aucun enfoncement qui ſoit conſiderable, & qui d'ailleurs ne provient que de la molleſſe de la partie extérieure, il s'en évapore ſeulement le tiers ou le quart ; ce qui arrive de même aux Cryſtallins des autres Animaux, dont l'évaporation ſe fait à proportion de leur âge. Ces Cryſtallins, qui ſont d'une ſi grande molleſſe dans le premier âge, deviennent peu-à-peu plus fermes, enſorte que dans l'Homme de 15 ou 20 ans la conſiſtance du Cryſtallin ſe trouve égale au centre & à la circonference, ce que l'on remarque auſſi dans les Cryſtallins de Veaux de deux mois, ou deux mois & demi, & dans ceux d'Agneaux de ſix ſemaines ou deux mois. La partie centrale commence à devenir plus ferme dans l'Homme à l'âge de 20 ou 25 ans ; cette fermeté s'augmente & s'étend peu-à-peu vers la circonference, qui devient auſſi plus ferme ; mais quelque fermeté qu'elle acquiere, elle l'eſt rarement autant que la partie centrale.

Les Cryſtallins ſont non ſeulement d'autant plus fermes que les Animaux ſont plus âgés,

mais ceux des Animaux à quatre pieds, des Oiſeaux & des Poiſſons le ſont plus que ceux de l'Homme. Les Cryſtallins des Yeux de Dindon, d'Oye, de Cheval, de Bœuf, de Mouton, & âgés d'un an, ſont plus fermes que ceux d'Hommes âgés de 25 ans.

Les Cryſtallins ſe trouvent d'autant plus fermes, qu'ils ſont plus gros à proportion de leur âge. Ceux de Chevaux le ſont plus que ceux de Bœufs, qui le ſont plus que ceux de Moutons, & ceux-ci que ceux de Chiens & de Chats.

Ceux des Animaux à quatre pieds ſont plus fermes que ceux des Oiſeaux, mais ceux des Poiſſons ſont beaucoup plus fermes que ceux de Chevaux & de Bœufs, enſorte que la partie centrale des Cryſtallins des Poiſſons a une fermeté qui approche quelquefois de la dureté de la Corne; il eſt vrai que la ſubſtance externe de ces Cryſtallins eſt plus molle que celle des autres Cryſtallins (ce que Morgagni * a remarqué) car elle eſt mucilagineuſe, ce que j'ai vu auſſi dans le Cryſtallin de la Loutre, animal à quatre pieds, mais aquatique.

Il y a encore une choſe ſinguliere qui arrive aux Cryſtallins des Yeux de l'Homme, & que je n'ai vue dans aucun des Cryſtallins des Animaux à quatre pieds, des Oiſeaux & des Poiſſons.

Le Cryſtallin de l'Homme eſt tranſparent & ſans couleur depuis la naiſſance juſquà l'âge de 25 ans ou environ, après quoi il commen-

* *Adverſ. 6. p. 90.*

mence à prendre dans le centre une couleur jaune de paille très legere, qui augmente à mesure que l'on avance en âge ; * la couleur devient peu-à-peu plus jaune, & s'étend vers la circonference. J'ai vu les Cryſtallins d'un Invalide âgé de 81 ans, qui reſſembloient par leur couleur & leur tranſparence à des morceaux d'Ambre jaune bien tranſparens ; & plus les Cryſtallins ſont fermes, plus ils ſont jaunes. Mais quelque fermeté qu'ayent les Cryſtallins des Animaux à quatre pieds, des Oiſeaux & des Poiſſons, je n'en ai trouvé aucun qui eût la moindre couleur. Il y a des Cryſtallins de Chevaux, mais peu, qui acquierent cette couleur en ſechant à l'air, ils n'avoient aucune couleur dans le tems que je les ai tirés des Yeux. Les Cryſtallins de Poiſſons, qui ſont plus fermes que ceux de Chevaux, ne jauniſſent point en ſechant. J'ai quelquefois trouvé dans le même Homme un Cryſtallin plus jaune que l'autre.

Venons préſentement à la ſtructure du Cryſtallin. Il eſt formé & compoſé de fibres agencées les unes contre les autres dans un certain ordre. On voit aſſez facilement ces fibres dans un Cryſtallin nouvellement tiré de l'Oeil d'un Bœuf. On frotte un Scalpel d'huile, on l'enfonce environ de l'épaiſſeur d'une demi-ligne, plus ou moins, au centre d'une des ſurfaces de ce Cryſtallin, puis on ramene le Scalpel vers la circonference, en déchirant la ſubſtance du Cryſtallin, on voit les fibres du Cryſtallin qui forment des pellicules po-

* V. les Mem. de l'Acad. an. 1726. p. 113 & ſuiv.

posées les unes sur les autres. On découvre facilement ces pellicules dans les Crystallins sechés à l'air, mais on ne voit point les fibres. On découvre encore mieux l'un & l'autre dans ceux que l'on a fait bouillir dans l'eau.

Voici les expériences que j'ai faites pour cela avec des Crystallins de Bœufs.

J'ai pris un Crystallin de Bœuf qui pesoit 48 grains, il avoit 8 lignes $\frac{1}{2}$ de diametre, & 5 lignes $\frac{1}{2}$ d'épaisseur. Je l'ai laissé secher à l'air au mois de Juillet. Au bout de quatre jours il ne pesoit plus que 22 grains. Il avoit 7 lignes de diametre, & 4 lignes $\frac{1}{4}$ d'épaisseur, mais ses surfaces étoient très inégales, bosselées, plus épaisses en des endroits que dans d'autres. Il étoit blanc, opaque à sa partie extérieure, transparent à sa partie interne, mais non pas de cette transparence dont il étoit lorsque je l'ai tiré de l'Oeil. La partie externe étoit feuilletée, la partie interne étoit égale, & s'enlevoit par pieces qui ressembloient à des côtes de Melon: le tout se réduisoit facilement en poudre.

J'ai laissé secher beaucoup d'autres Crystallins, il s'en est trouvé qui pesoient 50 grains, qui étant sechés, ne pesoient plus que 12 grains; d'autres pesant 46 grains, pesoient 30 grains étant secs. Les Crystallins qui perdent le plus de leur pesanteur, ont moins de matiere transparente, & plus de cette matiere feuilletée, blanche & opaque; & ceux qui conservent le plus de leur pesanteur, ont moins de matiere blanche & opaque, & plus

de matiere tranſparente. En général on leur trouve d'autant plus de matiere tranſparente, étant ſechés, qu'ils ſont naturellement plus fermes & d'Animaux plus âgés; c'eſt ce qui fait que l'on rencontre rarement de la ſubſtance tranſparente dans les Cryſtallins de l'Homme qui ſont ſechés, ils ſe réduiſent preſque entierement en matiere blanche en ſechant, &, comme je l'ai dit, perdent quelquefois les trois quarts de leur peſanteur. Les Cryſtallins de Veaux, & de tous les jeunes Animaux, perdent, en ſechant, auſſi les trois quarts de leur peſanteur & plus, & l'on n'y trouve point de matiere tranſparente. Les Cryſtallins ſont beaucoup plus mous à leur partie extérieure qu'à leur partie interne; lorſque l'humidité, qui cauſe cette molleſſe, vient à s'évaporer, elle laiſſe des eſpaces vuides, les parties ſolides ſe rapprochent les unes des autres, mais inégalement; ainſi les plans ne ſe trouvant plus paralleles les uns à l'égard des autres, la matiere lumineuſe qui y paſſe, trouve inceſſamment des plans inclinés, ſe rompt & ſe réfléchit d'une infinité de manieres, ce qui rend le corps opaque, comme il arrive au Verre pilé & au Sablon, compoſés d'une infinité de parties toutes tranſparentes.

* Briggs dit que les Cryſtallins mis dans une cuillier d'argent expoſée ſur les charbons ardens, ſe réduiſent en gelée: je ne ſai s'il a obmis de rapporter quelques circonſtances: j'ai fait cette expérience comme il le dit, bien-

* *Traité de l'Oeil. ch. 4.*

bien-loin de se réduire en gelée, ils se grillent après que toute l'humidité est évaporée; il n'y reste le plus souvent point de matiere transparente, parce que l'humidité qui se trouve dans toute la substance du Crystallin est poussée avec trop de force par la chaleur, & dérange les parties internes du Crystallin.

J'ai mis tremper un Crystallin dans l'eau froide, il pesoit 44 grains, il avoit 8 lign. $\frac{1}{3}$ de largeur, 5 lign. $\frac{1}{3}$ d'épaisseur. Je l'ai retiré 26 heures après, il pesoit 56 grains $\frac{1}{2}$, il avoit 8 lign. $\frac{2}{3}$ de diametre & 6 lign. $\frac{3}{4}$ d'épaisseur. J'en ai mis tremper d'autres, qui ont donné bien des varietés: plus ils sont fermes, plus ils grossissent, & fendent quelquefois leur capsule, & pour-lors ils se trouvent très inégaux, & toujours très mous; si on les laisse tremper plus longtems, ils se réduisent en mucilage.

Les Crystallins bouillis dans l'eau, deviennent opaques & fermes; leur surface reste quelquefois réguliere, & quelquefois irréguliere. Ces Crystallins diminuent dans leur poids & leurs dimensions, puis exposés à l'air encore tout chauds, se sechent bien vîte, & se fendent d'abord en trois parties à leurs surfaces antérieures & postérieures. Chacune de ces parties se divise en plusieurs autres, & par ce moyen on peut découvrir leur structure; * mais celà se fait encore mieux dans les Crystallins trempés dans les Esprits aci-

* *V. M. Antoine Maitrejean, Descript. de l'Oeil, ch. 11.*

acides, ce qui m'a engagé de faire quantité d'expériences dans lesquelles j'ai employé beaucoup de Cryſtallins de Bœufs, & très peu de Cryſtallins d'Hommes, parce qu'ils ſont trop petits & trop mous.

J'ai mis dans l'Eſprit de Nitre un Cryſtallin d'Homme qui peſoit 4 grains; il avoit 4 lign. ½ de largeur, & 2 lign. d'épaiſſeur. Il a tout auſſi-tôt blanchi, il nageoit ſur la liqueur. Je l'ai retiré 24 heures après, il n'avoit plus de capſule, elle étoit diſſoute.

Le Cryſtallin étoit devenu jaune-pâle, ſes ſurfaces étoient encore unies & polies. Il peſoit 4 grains, il avoit 4 lignes de diametre, & 2 lignes d'épaiſſeur. Etant reſté quelque tems à l'air, il s'eſt fendu en pluſieurs rayons de la circonference au centre; il s'eſt ſéparé par pieces qui reſſembloient à des côtes de Melon, & par fibres très fines de la groſſeur des fils de Soye grege; elles étoient jaunâtres. Tous les Cryſtallins d'Hommes que j'ai mis dans l'Eſprit de Nitre, ont été de même, à peu de choſe près, Les plus mous ſe diſſolvent tant ſoit peu, ils diminuent de poids, & reſtent plus mous que les autres.

J'ai mis dans l'Eſprit de Nitre un Cryſtallin de Bœuf, il peſoit 47 grains ½, il avoit 8 lign. ½ de diametre ou de largeur, & 6 lignes d'épaiſſeur. La capſule s'eſt d'abord fendue, & s'eſt ſéparée du Cryſtallin qui nageoit ſur la liqueur, elle eſt devenue jaune, le Cryſtallin a blanchi tout auſſi-tôt, il s'eſt formé beaucoup de bulles, la capſule s'eſt preſque entierement diſſoute. J'ai retiré le Cryſ-

Cryſtallin 24 heures après, il étoit jaune à ſa ſurface. Il peſoit 52 grains, il eſt augmenté de 4 grains ½, il avoit 8 lignes de diametre, & 5 lign. ⅓ d'épaiſſeur. Il avoit donc diminué de demi-ligne dans ſon diametre, & de deux tiers de ligne dans ſon épaiſſeur, quoiqu'il eût augmenté de poids. Il étoit fendu en trois rayons du centre à la circonference, il s'eſt ſeché à l'air en 24 heures, & il s'eſt diviſé en pieces qui reſſembloient à des côtes de Melon, qui ſe ſont ſéparées en peaux, qui étoient jaunes de Safran, & ſes peaux en fibres très déliées comme le Cryſtallin de l'Homme.

Tous les Cryſtallins de Bœufs que j'ai mis dans l'Eſprit de Nitre pur, ont donné les mêmes phénomenes. Il y en a qui n'ont augmenté que d'un grain, d'autres ont diminué de 5 ou 6 grains; quelques-uns ont eu la ſurface très inégale, molle, enſorte que je n'ai pû en meſurer les dimenſions, & n'ont pu ſe ſecher à l'air qu'en trois fois 24 heures; il s'en eſt trouvé qui étoient mous dans le centre, & d'autres fermes dans toute leur ſubſtance.

J'ai mis un Cryſtallin d'Homme dans un mêlange de partie égale d'Eſprit de Nitre & d'Eau commune, il peſoit 4 grains ¼, il avoit 4 lign. ⅓ de diametre, & 2 lignes d'épaiſſeur. Il a blanchi dans le moment par rayons, il nageoit ſur la liqueur, mais le lendemain il s'eſt trouvé au fond. Je l'ai retiré 24 heures après, il étoit opaque, dur, jaunâtre, fendu en quatre rayons, envelopé de ſa capſule, qui

est restée transparente. Il pesoit 4 grains, il avoit 4 lignes de largeur, & 2 lignes d'épaisseur. Il avoit donc diminué d'un quart de grain, & d'un tiers de ligne dans son diametre.

J'ai mis un Crystallin de Bœuf dans le même mêlange d'Esprit de Nitre & d'Eau, il pesoit 49 grains, il avoit 8 lign. $\frac{1}{2}$ de largeur, & 5 lign. $\frac{2}{3}$ d'épaisseur. Il a d'abord nagé sur la liqueur, & est devenu blanc en une demi-minute, une heure & demie après il étoit précipité au fond de la liqueur. Je l'ai retiré, il s'est trouvé blanc, opaque, fendu en six rayons du centre de sa surface antérieure jusqu'auprès de sa circonference. Je l'ai remis dans la liqueur, le lendemain je l'ai trouvé nageant sur la liqueur; je l'ai retiré, il étoit jaune de paille, dur, opaque, fendu plus profondément qu'il n'étoit le jour précédent. Il avoit 8 lignes de diametre ou de largeur, & 5 lign. $\frac{1}{2}$ d'épaisseur. Il pesoit 44 grains sans la membrane qui pesoit un grain $\frac{1}{2}$, elle étoit transparente. Ce Crystallin a donc diminué dans ses dimensions & dans sa pesanteur.

La même chose est arrivée à un autre Crystallin dans une pareille liqueur.

Les Crystallins mis dans l'Esprit de Sel dulcifié, ont eu les mêmes phénomenes que ceux qui ont été mis dans l'Esprit de Nitre mêlé avec moitié Eau.

Les Crystallins que j'ai mis dans l'Esprit de Sel, ont donné à peu près les mêmes phénomenes que ceux que j'ai mis dans l'Esprit de Nitre pur. Ils ont nagé sur cet Esprit; ils ont blanchi tout d'abord, puis ils sont deve-

nus

nus jaunes, ils se sont fendus par rayons, la membrane ou capsule s'est dissoute dans quelques expériences, elle s'est trouvée toute entiere dans d'autres, & transparente. Ils ont diminué dans leurs dimensions, mais ce qu'il y a de different, ils ont toujours diminué de poids depuis 5 grains jusqu'à 10, & ces Crystallins étant gardés, sont toujours devenus bruns ou noirs, au-lieu que les Crystallins, mis dans l'Esprit de Nitre & sechés, sont restés jaunes de Safran ou aurore.

* Les Crystallins mis dans l'Esprit de Vitriol pur, ont eu les mêmes phénomenes que ceux qui ont été mis dans le mêlange d'Esprit de Nitre & d'Eau commune. Il y a cela de different: les Crystallins, tant d'Hommes que de Bœufs, sont devenus blanchâtres dans l'Esprit de Vitriol, ils ont moins diminué dans leur pesanteur & dans leurs dimensions, principalement ceux de Bœufs, & ils ne se sont fendus qu'après avoir été exposés à l'air & un peu sechés. Les Crystallins d'Hommes ont d'abord nagé sur la liqueur, mais le lendemain ils se sont trouvés au fond; les Crystallins de Bœufs ont été au fond de la liqueur aussi-tôt qu'on les y a mis, & sont devenus tous blancs.

La même chose arrive aux Crystallins trempés dans égale partie d'Esprit de Vitriol & d'Eau, mais il faut les y laisser plus longtems. Ils n'ont point diminué de pesanteur, il y en a même qui ont augmenté de 2 grains, jusqu'à 4 grains.

 J'ai

* *V. M. Antoine Maître-Jan, Descr. de l'Oeil, c. 11. du Crystallin.*

J'ai mis des Cryſtallins de Bœufs dans l'Eſprit de Vinaigre, ils ont tous augmenté dans leur poids & leurs dimenſions; il y en a quelques-uns qui expoſés à l'air, ſe ſont fendus très régulierement en ſechant, mais les autres ſe ſont trouvés irréguliers.

La plupart des Cryſtallins que j'ai mis dans l'Huile de Vitriol, ſont devenus d'un jaune-brun, opaques, mous comme de la pâte, très irréguliers & inégaux à leur ſurface externe. Si on les expoſe à l'air, ils deviennent d'un brun noir, & ne ſe ſechent jamais bien, la membrane s'eſt diſſoute; l'Huile de Vitriol dulcifiée les a rendus opaques, blancs.

Le mêlange d'égale partie d'Huile de Vitriol & d'Eau commune produit le même effet ſur les Cryſtallins que l'Eſprit de Vitriol pur.

Nous venons de voir que les Cryſtallins trempés 24 heures, plus ou moins, dans les Eſprits acides de Vitriol, de Vinaigre, deviennent opaques, blancs, auſſi-bien que ceux qui ont trempé dans l'Eſprit de Nitre ou de Sel, affoiblis avec de l'Eau. Ces Cryſtallins ſe fendent quelquefois dans le tems même qu'ils trempent dans la liqueur, mais pour l'ordinaire ils ne ſe fendent qu'après en avoir été retirés, & avoir été expoſés à l'air pendant quelque tems, & pour-lors ils ſe fendent plus ou moins régulierement en pluſieurs endroits de leurs ſurfaces antérieures & poſtérieures.

Si l'on ſépare ces parties les unes des autres, on les trouve à peu près ſemblables aux pieces d'un Oignon qu'on auroit coupé par ſon axe en pluſieurs parties: on peut les ſé-

parer

parer par pellicules, qui jointes & unies ensemble, forment des envelopes qui sont emboîtées les unes dans les autres. Chacune de ces pellicules est formée par une infinité de filets courbes & déliés comme des fils de Soye grege, comme je l'ai déja dit, & assemblés les uns contre les autres à peu près parallelement.

Tous les Crystallins ne se fendent pas de la même maniere. Ceux d'Hommes se fendent de la circonference au centre; les fentes commencent à se former à la circonference, & se continuent vers le centre, où le plus souvent elles n'arrivent pas. Il y a rarement de la régularité dans ces fentes. Ceux de Poissons commencent toujours au centre des deux surfaces antérieure & postérieure, & se continuent d'une surface à l'autre.

Les Crystallins des Animaux à quatre pieds, que nous avons disséqués, se fendent aussi du centre de leur surface à la circonference, le plus souvent assez régulierement, & ces fentes se trouvent disposées de trois manieres differentes, mais toujours en rayons.

Dans la premiere les fentes se trouvent selon la rectitude des fibres, du centre à la circonference, qui divisent le Crystallin en trois parties, chacune desquelles est divisée en six autres, dont chacune forme un angle.

Dans la seconde on trouve des Crystallins divisés en trois parties, du centre à la circonference, mais non pas selon la rectitude des fibres, car la division se fait dans les angles de la premiere sorte, ce qui fait que chacune de ces trois parties se trouve divisée en

douze

douze parties ſelon la rectitude des fibres, mais non pas du centre à la circonference.

Dans la troiſieme les Cryſtallins ſe diviſent d'abord en trois parties comme dans la premiere maniere, puis ils ſe diviſent en trois autres ſemblables à la ſeconde; mais ces fentes & ces diviſions ſont rarement régulieres, car il ſe trouve quelquefois plus de diviſions, quelquefois moins, ce qui dépend du plus ou du moins d'adhérance des fibres les unes aux autres qui compoſent le Cryſtallin.

Quoi qu'il en ſoit, chaque couche dont le Cryſtallin eſt compoſé, eſt produite par une fibre, qui en paſſant & repaſſant de la partie antérieure à la poſtérieure, & de la partie poſtérieure à la partie antérieure, forme le plan de fibres qui produiſent ces couches, à peu près de la même maniere que Leeuwenhoek *, qui a donné tant de belles obſervations faites avec le Microſcope, les repréſente. Il ne dit point qu'il ait mis tremper les Cryſtallins dans aucune liqueur, & ne dit pas les moyens dont il s'eſt ſervi pour les préparer, & rendre ces fibres palpables; il paroît ſeulement qu'il a examiné ces Cryſtallins tirés nouvellement des Yeux, & qu'il en a examiné d'autres qui ont été expoſés à l'air pendant trois jours. Il s'eſt ſans doute ſervi du Microſcope, quoiqu'il n'en faſſe aucune mention: pour moi je n'ai pu découvrir cette ſtructure par aucun Microſcope. Je me ſuis ſervi de Loupes de 6 à 7 pouces de foyer

* *Arcan. natur. detect. tom. 2. p. 66. de formatione Cryſtallini.*

foyer, pour mieux découvrir les fibres des Cryſtallins que j'ai mis tremper dans les Eſprits acides, mais on peut s'en paſſer; on peut même ſe ſervir de Verre d'un plus petit foyer, ſelon la diſpoſition des Yeux; il y a des gens qui découvrent mieux les fibres du Cryſtallin avec un Verre de 2 pouces $\frac{1}{2}$ & 3 pouces de foyer, qu'avec des Verres qui en ont plus ou moins.

SOLUTION FORT SIMPLE D'UN PROBLEME ASTRONOMIQUE;

D'où l'on tire une Méthode nouvelle de déterminer les Nœuds des Planetes.

Par M. GODIN. *

PROBLEME.

TROUVER le point de l'Ecliptique où le mouvement du Soleil en aſcenſion droite eſt égal à ſon mouvement en longitude.

† SOLUTION. Soit *EQ* un quart de l'Equateur, *EC* un quart de l'Ecliptique, *pPCQ* le Colure des Solſtices, *p* le Pole de l'Ecliptique, *P* celui de l'Equateur, *PE* un Méridien mené par l'un des Equinoxes. Soit *S* le

* 25. Févr. 1710. † Fig. 1.

le point cherché sur l'Ecliptique, & *Y* un autre point aussi sur l'Ecliptique infiniment proche du premier, & *YZ* une portion d'un parallele à l'Equateur, on aura le petit Triangle *SZY* qu'on peut considerer comme plan & rectiligne, dont l'angle *YSZ* est égal à l'angle *PSC* du triangle sphérique *PSC*. Si par le point *Y* on mene un autre Méridien *PYT*, la question se réduit à trouver le point *S* de l'Ecliptique, tel que l'arc *SY* soit égal à l'arc *RT* de l'Equateur.

Dans le Triangle sphérique *PCS* rectangle en *C*, on aura cette proportion,

Sin. *PS* : Sin. *PC* :: Rayon : Sin. *PSC*,

& dans le petit Triangle on aura

YS : *YZ* :: Rayon : Sin. *YSZ* = *PSC*,

& parce que *TR* = *YS*,

TR : *YZ* :: Rayon : Sin. *YSZ*,

mais on aura aussi cette autre proportion,

TR : *YZ* :: Rayon : Sin. *PZ* ou *PS*.

En comparant les deux dernieres analogies, il suit que le sinus de l'angle *YSZ* ou *PSC* est égal au sinus de l'arc *PS*.

Pour trouver la valeur de cet arc, multipliez par la premiere analogie le sinus de *PC* complément de l'obliquité de l'Ecliptique par le Rayon, le produit sera le quarré du sinus de l'arc *PS* ou de l'angle *PSC*; & en logarithmes, si l'on ajoute le logarithme du sinus de 66° 31' au logarith. du sinus total, la moitié de la somme sera le logarithme du sinus de l'arc *PS* qu'on trouvera de 73° 16' 27", son complément *SR* sera donc de 16° 43' 33" pour la déclinaison du Soleil au point *S*

au

au tems de ſon mouvement en longitude égal à ſon mouvement en aſcenſion droite, & ſa diſtance *SE* au plus proche Equinoxe ſe trouvera par cette analogie.

Sin. *CQ*: Sin. *SR* :: Sin. *EC* ou le Rayon: Sin. *ES* qu'on trouvera de 46° 14' 17", & par conſéquent *SC* de 43° 45' 43" à quelques ſecondes près de ce qui eſt dans les Tables de M. de la Hire.

Si l'inclinaiſon de l'Orbite d'une Planete étoit de 15°, le point cherché *S* feroit éloigné du point *C* de 44° 29' 40", & ſi cette inclinaiſon étoit de 1° ſeulement, cet arc *SC* feroit de 44° 40' 15", car cet arc s'approche d'autant plus de 45° que l'inclinaiſon eſt petite, & au contraire; pour 85 degrés d'inclinaiſon, par exemple, il eſt de 16° 18' 50", ce qui paroîtra évident, ſi l'on conſidere que le ſinus de l'arc *PS* doit toujours être moyen proportionnel entre le rayon & le ſinus de *PC*, car dans la premiere analogie, en permutant, on aura Sin. *PC* : Sin. *PS* :: Sin. *PSC* = Sin. *PS*: Rayon, & par conſéquent plus le ſinus de *PC* approchera de la grandeur du rayon, c'eſt-à-dire, moins l'arc *CQ* ou l'inclinaiſon de la Planete ſera grande, & plus la moyenne proportionnelle *PS* approchera auſſi du rayon, & par conſéquent le point *S* du point *E*; ce ſera le contraire, ſi *PC* eſt plus petite.

On ſe ſervira de la même Méthode pour toutes les Planetes, ſuivant les differentes inclinaiſons de leurs Orbites à l'Ecliptique & à l'Equateur.

* Re-

* *Regiomontanus* a résolu ce Problême par les plus grands & les plus petits rapports entre les sinus des arcs de déclinaison & de leurs complémens, & les sinus des arcs, distances de ces points à l'un des Equinoxes; il trouve 46° 15' pour l'arc *ES*, ou 43° 45' pour *SC*; mais supposant son obliquité de l'Ecliptique de 23° 28', moindre que celle que je suppose de 23° 29', il devoit trouver l'arc *SC* plus grand d'une minute entiere ou environ; ce qui doit venir de son calcul.

† *Stevin* a aussi résolu le Problême d'après *Regiomontanus*, & par la même méthode; il a prétendu l'éclaircir, mais il l'a rendu trop diffuse. Il suppose l'obliquité de l'Ecliptique de 23° 51' 20'', d'où il trouve l'arc *SC* de 43° 43' 16'' $\frac{1}{4}$.

Enfin M. *Parent* en a donné une Solution ‡ dans laquelle il employe le Calcul differentiel: je crois l'avoir résolu plus simplement, & d'une maniere plus astronomique.

Dans l'ancienne démonstration de *Regiomontanus*, on suppose que le point *S* est tellement pris, que l'arc *PS* est moyen proportionnel entre le rayon & le sinus, complément de l'obliquité de l'Ecliptique; mais on n'y démontre pas pourquoi cela donne la solution du Problême.

Dans celle de M. *Parent* il trouve la Tangente de la distance du Solstice au point *S*,

* *Regiomont. Epitom. Almag. lib.* 3. *prop.* 25. Voyez aussi *Kepler. Epitom. lib.* 3. *p.* 258.

† *Stevin. Hypomnem. mathem. tom.* 1. *Cosmogr. part.* 3. *de mot. cœlest. p.* 148. & *seq.*

‡ Mem. de l'Acad. 1704. p. 185.

S, moyenne proportionnelle entre le rayon & le ſinus, complément de l'obliquité de l'Ecliptique; d'où il ſuit que cette Tangente eſt égale au ſinus, complément de la déclinaiſon du Soleil au point *S* de ſon mouvement médiocre.

Si l'on connoiſſoit le lieu du point *S* dans l'Ecliptique, indépendamment du lieu des points *E* & *C*, c'eſt-à-dire, quelle que fût la longitude de ces points, en connoiſſant ſeulement la plus grande diſtance *CQ* de l'Orbe *EC* à l'Orbe *EQ*, on détermineroit la longitude de ces points *E* & *C*; & par conſéquent 1°.* ſi *EQ* repréſente l'Ecliptique, & *EC* l'Orbite d'une Planete, connoiſſant l'inclinaiſon *CQ* de cet Orbite à l'Ecliptique, on trouvera par la méthode ci-deſſus, la valeur des arcs *SR*, *SC*, & *SE*; & trouvant par obſervation le lieu de la Planete en *S* dans le tems que ſon mouvement *ST* ſur ſon Orbite eſt égal à ſon mouvement en longitude *TR* ſur l'Ecliptique, ou bien obſervant ce lieu *S* dans le tems que l'inclinaiſon apparente *SR* de la Planete eſt égale à celle qu'on a déterminée par calcul, on aura auſſi le lieu des points *C* & *E*, c'eſt-à-dire, des limites & des Nœuds de cette Planete; le Nœud, par exemple, aura une plus grande longitude que le point *S* de tout l'arc déterminé *SE*, ſi la latitude de la Planete va en décroiſſant; & au contraire elle ſera moindre, ſi latitude va en augmentant.

2°. Si *EC* eſt toujours l'Orbite de la Planete,

* Fig. 1.

te, & que *EQ* soit l'Equateur, connoissant par observation la plus grande déclinaison *CQ* de la Planete, on déterminera comme ci-dessus les valeurs de *SR*, *SC*, & *SE*; observant donc le lieu de la Planete, lorsqu'elle a une déclinaison *SR* égale à la calculée, ou lorsque son mouvement sur son Orbite est égal à son mouvement en ascension droite, on aura l'ascension droite du point *S* ou *R*, & par conséquent celles des points *E* & *C*, c'est-à-dire, qu'on connoitra le point de l'Equateur où l'Orbite de la Planete le coupe, & le point de l'Equateur auquel répondent les limites de cet Orbite.

Mais connoissant le point où l'Orbite d'une Planete coupe l'Equateur, & le point où l'Ecliptique coupe aussi l'Equateur, on connoitra le point d'intersection de l'Orbite de cette Planete & de l'Ecliptique; il ne faut pour cela que résoudre le Triangle sphérique * *AFG* dans lequel *AG* représente l'Equateur, *AF* l'Ecliptique, & *GF* l'Orbite de la Planete. Dans ce Triangle on connoit le côté *AG*, difference d'ascension droite entre *A*, l'un des Equinoxes, & *G* le point de l'Equateur où il est coupé par l'Orbite de la Planete; l'angle en *A* est l'obliquité de l'Ecliptique, & l'angle en *G*, ou son supplément, est l'obliquité de l'Orbite de la Planete égale à sa plus grande déclinaison observée; donc on connoitra le côté *AF*, distance du Nœud de la Planete à l'un des Equinoxes, & l'angle en *F* de l'inclinaison de l'Orbite de cette Planete à l'Ecliptique.

On

* Fig. 2.

On peut donc trouver le lieu des Nœuds d'une Planete par l'obſervation de ſon inclinaiſon à l'Ecliptique & de ſa déclinaiſon au tems de ſon mouvement médiocre ſur ſon Orbite par rapport à ſon mouvement ſur l'Ecliptique & à ſon mouvement en aſcenſion droite.

Mais cette Théorie ſi ſimple ne ſuffit abſolument que lorſqu'on eſt au centre des Cercles * *EC* & *EQ*, & que les arcs *CQ*, *SR*, ſont les véritables latitudes ou déclinaiſons, & qu'elles ſont invariables, c'eſt-à-dire, non ſujettes à des inégalités optiques: elle ne convient donc, par rapport à la recherche des Nœuds des Planetes, qu'à un Obſervateur qui ſeroit dans le Soleil ſuppoſé immobile au centre du mouvement de ces Planetes. De ce centre ſeul les arcs *CQ* & *SR* meſurent les véritables inclinaiſons des points *C* & *S*; car comme les plus grandes latitudes ou déclinaiſons *CQ*, vues de la Terre, ſont variables ſuivant le plus ou le moins de diſtance de la Terre à la Planete, le point *S* & par conſéquent le lieu du Nœud *E* auroient autant de poſitions differentes que *CQ* auroit de differentes valeurs. Donc les plus grandes latitudes ou déclinaiſons, vues de la Terre, ne peuvent ſervir à la ſolution de ce Problême, ſi ce n'eſt lorſqu'elles ſont égales à ces mêmes choſes vues du Soleil, c'eſt-à-dire, lorſque la Planete poſée dans ſes limites, eſt également éloignée du Soleil & de la Terre, ou en quadrature environ avec le Soleil, ce qui eſt un cas fort rare.

Ce-

* Fig. 1.

Cependant, comme la détermination des Nœuds des Planetes est très importante, & qu'on ne sauroit avoir trop de Méthodes pour arriver au même but, lorsque chacune a sa difficulté, voici de quelle maniere j'employe celle-ci à cette recherche.

Je suppose seulement que l'on connoisse la Théorie du Soleil ou de la Terre, & les distances de la Planete au Soleil, d'où suit la connoissance de ses distances à la Terre.*

* Soit *S* le Soleil, *T* la Terre. *APL* est l'Orbite d'une Planete posée en *P*. *ARM* est l'Ecliptique. Le point *A* un des Nœuds de la Planete. Connoissant *LM* la plus grande inclinaison de l'Orbite de la Planete à l'Ecliptique vue du Soleil, on trouvera, comme ci-dessus, l'inclinaison *PR* vue du Soleil telle que la Planete posée en *P* paroîtra décrire sur son Orbite un arc égal à son arc correspondant sur l'Ecliptique. Si l'on prend donc, de la maniere dont on va dire, le lieu de la Planete sur l'Ecliptique en *R* par rapport au premier point d'*Aries*, dans le moment que cette Planete a l'inclinaison calculée, dans le Triangle sphérique *APR* rectangle en *R*, on connoit le côté *PR*, & l'Angle en *A* = *LM*: on connoitra donc *AR*, & par conséquent le lieu du Nœud *A* sur l'Ecliptique, vu du Soleil.

Je suppose donc que l'on observe continuellement les latitudes apparentes de la Planete, c'est-à-dire, l'angle *PTR*, & que par les distances connues du Soleil à la Terre & à la Planete, on détermine laquelle de toutes

* Fig 3.

tes les latitudes *PR* observées, est égale à l'inclinaison calculée vue du Soleil, en ce cas le point *P* sera celui d'égalité du mouvement de la Planete sur son Orbite, & en longitude sur l'Ecliptique; & si l'on observe dans le même moment le lieu de la Planete sur l'Ecliptique en *R*, vu de la Terre, qui donnera l'angle *CTR*, on aura, en résolvant le Triangle *RST*, dont les trois côtés & l'angle en *T* sont connus, l'angle *RST* qui comparé avec le lieu héliocentrique de la Terre, donnera la véritable longitude héliocentrique de la Planete réduite à l'Ecliptique; d'où l'on conclura, comme ci-dessus, le vrai lieu de la Planete.

Pour les Planetes qui ont des Satellites, le Problême devient en certains cas plus facile, car on peut quelquefois y déduire immédiatement de l'observation ce qu'on vient de déterminer par les distances, qui est ce qu'on appelle la seconde inégalité de la Planete; car si l'on sait assez précisément le tems de la révolution périodique d'un Satellite autour de sa Planete, on observera très aisément la valeur de l'arc *OE* de l'Orbite du Satellite compris entre le milieu *O* de sa demeure dans l'ombre de la Planete & le point *E* où il paroît vu de la Terre en conjonction avec sa Planete; cet arc est égal à l'angle *TPS*; ainsi dans le Triangle *TPS*, on connoit *ST* l'angle *TPS* & l'angle *STP*, difference entre les lieux apparens du Soleil & de la Planete; on connoitra donc le côté *TP*: & dans le Triangle *RTP* rectangle en *R*, on connoit l'angle en *T* & le côté *TP*;

donc on connoîtra *TR*. Enfin dans le Triangle *RTS* on connoit *ST* & *TR*, & l'angle compris *STR*, ce qui donnera l'angle *RST*, difference de longitude entre la Terre & la Planete vues du Soleil; d'où l'on conclura, comme ci-devant, le vrai lieu du point *A*, Nœud de la Planete.

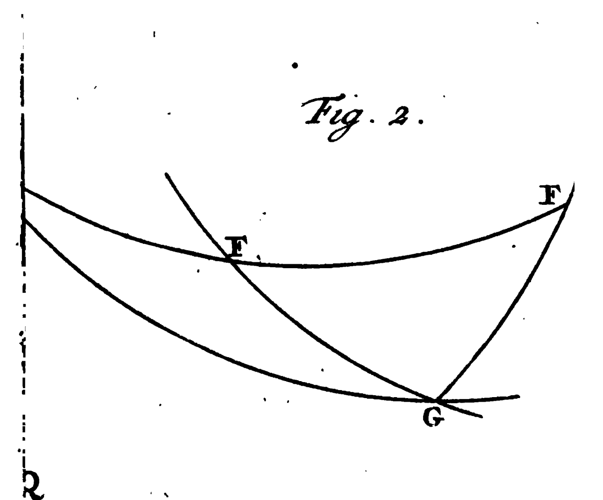
Je suppose ici, comme on voit, qu'on puisse observer l'immersion & l'émersion du Satellite de l'ombre de sa Planete, ce qui ne se peut pas dans tous les Satellites, dans le premier de Jupiter, par exemple, & très rarement dans le second.

On trouvera de la même maniere le point de l'Equateur où il est coupé par l'Orbite d'une Planete vue du Soleil.

Par ces Méthodes on multiplie les points des Orbites des Planetes qui peuvent servir à déterminer la position de leurs Nœuds; par la Méthode ordinaire, qui est d'observer la Planete proche de ses Nœuds mêmes lorsque sa latitude change de dénomination dans l'espace de quelques jours, on n'a, dans toute la révolution d'une Planete, que deux occasions favorables de faire ces observations; & il faut, de même que nous venons de faire, y supposer les distances de la Planete à la Terre & au Soleil, pour changer les latitudes apparentes & la position apparente du Nœud en inclinaisons & en vrai lieu héliocentrique du Nœud.

Il reste à donner, dans une suite, quelques exemples de ces Méthodes pour differentes Planetes, fondées sur des observations, afin qu'on puisse plus surement juger

du



R

du degré de précision qu'on en peut attendre.

MEMOIRE

SUR LE SEL LIXIVIEL DU GAYAC.

Par M. BOURDELIN. *

DANS le Mémoire que je présentai en 1728 à l'Académie, sur la formation des Sels alkalis, je tâchai de prouver que ces Sels n'étoient que des Sels décomposés; & que si la partie grasse des Végétaux contribuoit à leur formation, ce n'étoit qu'en enlevant au Sel essentiel une grande partie de ses Acides, & point du tout en s'unissant avec ce même Sel essentiel, comme le veut M. Stahl, & comme il prétend le prouver par une expérience que je rapportai d'après lui, & de laquelle je tirai des conséquences toutes differentes, & tout-à-fait opposées à celles qu'il en tire. Dans le même Livre, le même Auteur rapporte une expérience assez singuliere, concernant ce sujet. On a cru jusqu'ici que le feu formoit seul les Sels alkalis que l'on tire des matieres végétales; que cet Agent n'avoit besoin, pour former ces Sels, d'aucune aide de la part du Chymiste,

* 28 Janvier 1730.

mifte, ni d'aucune préparation; & qu'il fuffisoit de lui livrer une Plante deffechée, pour qu'il formât, en la détruifant, autant de Sel lixiviel qu'elle contenoit de matiere propre à s'alkalifer. Mais dans l'expérience de M. Stahl la chofe fe paffe differemment; le Chymifte paroît avoir grande part à la production du Sel alkali; ce n'eft qu'après que fon induftrie a tiré du Mixte les matériaux néceffaires pour la compofition de ce Sel, qu'il les a rapprochés, &, pour ainfi dire, préfentés l'un à l'autre, que le feu les combine, les unit plus étroitement, & opere par ce moyen, & avec ce fecours, une production de Sel alkali bien plus abondante. Voici le fait.

M. Stahl fait remarquer, en parlant des Sels alkalis, qu'il y a quelques Végétaux qui n'en donnent pas tant par l'opération ordinaire, c'eft-à-dire, lorfque l'on fe contente de les faire fecher & de les brûler, que lorfqu'on s'y prend d'une autre façon. „ Il rap„ porte pour exemple le bois de Gayac, dont „ on ne tire, dit-il, par l'incineration feule, „ que très peu de Sel alkali; mais fi l'on „ prend, dit M. Stahl, les râpures de ce „ même bois, qu'on les faffe bouillir un cer„ tain tems, que l'on en faffe évaporer la „ décoction lentement, & jufqu'à ficcité, la „ matiere qui refte, étant brûlée & legere„ ment calcinée, donne infiniment plus de „ Sel fixe." Voilà l'expérience de M. Stahl, voyons l'explication qu'il en donne.

„ Pour expliquer ce phénomene, dit M. „ Stahl, il eft probable que les parties fali„ nes nitreufes qui font contenues dans le

„ Gayac,

*. 3.

E
P
O
R
T
C
L
M
☊

„ Gayac, y sont logées séparément & à quelque distance des parties huileuses qui sont renfermées dans leurs petites loges particulieres. Cela fait que dans l'instant de la déflagration, le feu pousse & chasse hors du Mixte séparément les parties salines & les parties huileuses, qui par ce moyen ne peuvent pas se toucher, se joindre, brûler ensemble, & ainsi se combiner pour composer le Sel alkali ; au-lieu que si, par la coction, on tire de leurs cellules chacun de ces deux principes, ensorte qu'ils puissent se confondre librement ensemble dans l'eau, & que par le moyen de l'épaississement de la matiere qui reste après l'évaporation poussée jusqu'à siccité, les particules salines & huileuses puissent s'accrocher ensemble, & se mêler les unes avec les autres, & qu'alors on brûle cette matiere, l'action du feu peut combiner plus facilement les deux principes qui dans cet état se touchent immédiatement, & de cette combinaison suit l'effet qu'on doit attendre, c'est-à-dire, la production du Sel alkali ". M. Stahl, dans cette explication de son expérience, ne s'écarte point de ses principes, & déduit toujours la formation du Sel alkali d'une Plante, du mélange & de l'union intime & durable qui se fait du Sel essentiel de cette Plante avec sa partie grasse par le moyen du feu, & dans le sein du feu.

Il y a plusieurs choses dans cette explication, qu'un Lecteur attentif ne sauroit aisément passer. Mais, sans entrer dans un plus grand détail, sur quel fondement M. Stahl suppo-

se-t-il une distance si éloignée entre les particules salines & huileuses dans le bois de Gayac? Quelle preuve en pourroit-il apporter? Si l'on regarde le Gayac comme les autres Plantes, c'est-à-dire, comme un assemblage de Vaisseaux ou de Tuyaux arrosés par des liqueurs, dans lesquelles tous les principes de la Plante, & par conséquent l'Huile & le Sel essentiel, sont déja renfermés, &, pour ainsi dire, combinés par la Nature, on accordera difficilement à M. Stahl les differens logemens, & les cellules écartées qu'il assigne à ces deux principes. M. Stahl alléguera-t-il en sa faveur une apparence d'analogie qui peut se rencontrer entre les Plantes & les Animaux, dans lesquels, par le moyen des sécrétions, differentes humeurs se trouvent renfermées séparément dans differens réservoirs? Mais pour-lors on sera en droit de pousser l'analogie plus loin, & de dire, que comme dans les Animaux il se trouve par-tout de l'Huile & du Sel mêlés ensemble, il doit aussi s'en trouver par-tout dans les Plantes. Il est bien vrai que dans certaines liqueurs des Animaux, on découvre distinctement que certains principes y dominent. Mais ces mêmes principes s'y trouvent-ils dans leur premiere simplicité, s'y trouvent-ils totalement dégagés les uns des autres? Rencontre-t-on, par exemple, du Sel pur, de l'Huile pure? Les graisses des Animaux ne contiennent-elles pas du Sel, même en assez grande quantité? Dans la Bile, toute sulphureuse qu'elle est, ne démêle-t-on pas, même par le seul goût, le Sel qui

qui y eſt mêlé? Avanceroit-on avec raiſon que dans la Salive il ne ſe trouve purement & ſimplement que du Sel? De même dans les Plantes, leurs ſucs les plus aqueux en apparence, ne contiennent-ils que du Sel, ne s'y rencontre-t-il pas quelque portion d'Huile? Quoique la Réſine ſoit la partie graſſe des Plantes, cette Réſine n'eſt-elle purement que de l'Huile? Quand on la brûle, ne donne-t-elle pas du Sel alkali? preuve qu'elle contient une portion de Sel eſſentiel qui ſe décompoſe dans le feu. Mais ſi, dans les Végétaux, comme dans les Animaux, la partie ſaline & la partie graſſe ſe trouvent mêlées enſemble, même dans les liqueurs dans leſquelles on auroit le plus lieu de croire qu'elles exiſtent ſéparément l'une de l'autre, que doit-on penſer de tout le corps de la Plante en général, dont les canaux contiennent les Sucs qui ſont l'origine & la ſource de toutes les ſécrétions qui ſe font dans la Plante, comme le Sang l'eſt de celles qui ſe font dans l'Animal, & dans leſquels par conſéquent ces deux principes ſont contenus confuſément, avant de ſe ſéparer pour être renfermés dans leurs differens réſervoirs? M. Stahl ne nie pas non plus qu'il ſe rencontre du Sel & de l'Huile combinés enſemble dans toute l'étendue de la Plante, puiſqu'il avoue qu'en brûlant le Gayac à la façon ordinaire, on en tire du Sel alkali, mais on l'en tire, dit-il, en moindre quantité. La difficulté ne roule donc que ſur le plus ou le moins, & le Gayac donne moins de Sel alkali par ce procedé, parce que la diſtance éloignée qui ſe rencontre, ſelon M.

Stahl, entre l'Huile & le Sel dans ce bois, fait qu'une grande partie de ces deux principes échape au mêlange & à la combinaison que le feu en feroit, s'ils étoient plus rapprochés, & si toute l'Huile requise pour la formation du Sel lixiviel pouvoit se combiner avec tout le Sel essentiel.

Je n'opposerai à ce raisonnement que l'expérience que fournit le Nitre fixé par les Charbons. Ce Sel ne s'alkalise que par le moyen de la poudre de Charbon que l'on y jette, lorsqu'il est en fusion dans le Creuset qui le contient. Il se fait, pour-lors, une liaison étroite & une union de la partie grasse du Charbon avec l'acide du Nitre qu'elle emporte avec elle, & à qui elle fait suivre la même détermination de mouvement qu'elle a reçu du feu, & qu'elle suit elle-même, comme j'ai tâché de le prouver dans mon Mémoire de 1728. Il se fait donc, avant cette fuite de l'Acide nitreux, une liaison de la partie grasse du Charbon avec ce Sel. Mais pourquoi la même chose n'arrivera-t-elle pas entre l'Huile & le Sel essentiel d'une même Plante? L'Acide du Nitre & la partie grasse du Charbon sont deux substances tout-à-fait étrangeres l'une à l'autre, cependant elles s'unissent lorsque l'on jette la poudre de Charbon dans le Creuset; tout le Nitre qui y est contenu se décompose, & devient du Sel alkali. Est-il vraisemblable qu'il se trouve plus de proximité entre ces deux substances, qu'il ne s'en trouve entre deux pareils principes renfermés dans une même Plante, & que la Nature avoit intimement mêlés & combinés

dans

dans les liqueurs & le suc nourricier qui a servi à la végétation, l'accroissement & la conservation de cette Plante ? Que l'on explique la formation du Sel alkali par l'union fixe & durable de la partie grasse avec le Sel essentiel entier, selon l'hypothese de M. Stahl; ou qu'on l'explique, selon la mienne, par la liaison qui se fait de cette même partie grasse avec l'Acide seulement du Sel essentiel, lequel Acide est emporté par elle; toujours, selon l'un ou l'autre sentiment, se fait-il une union étroite, & toujours sera-t-on fondé à demander pourquoi cette union se fait entre deux matieres tout-à-fait étrangeres l'une à l'autre, & pourquoi elle ne se feroit pas entre deux semblables substances, qui sont déja rassemblées & mêlées ensemble dans un même Végétal. Mais passons du vraisemblable au vrai; après avoir réfuté sommairement l'explication de M. Stahl, suivons son expérience, & examinons-en la vérité.

La premiere fois que je lus avec attention l'expérience de M. Stahl, sa singularité fit naître en même tems ma surprise & mes doutes. Je trouvois qu'il y avoit de l'industrie à remédier ainsi à l'empêchement que la Nature sembloit avoir formé dans le Gayac à une production abondante de Sel alkali. Mais je n'étois pas bien convaincu de la réalité de l'obstacle, ni de l'efficacité du remede qu'on y apportoit. Malgré la grande réputation que s'est acquis M. Stahl, & qu'il s'est acquis à juste titre, la confiance que j'avois à une expérience qu'il citoit, & que je devois supposer qu'il avoit faite, ne put jamais aller jus-

qu'à me persuader que la simple décoction du Gayac dût apporter un si grand changement dans la quantité de Sel fixe qu'on en tire. Je ne concevois pas que l'Eau bouillante seule, soit comme échauffée par le feu, soit comme composée de parties qui à l'aide du feu pussent s'insinuer dans les pores d'un Mixte, eût assez d'efficacité pour tirer d'un bois, dont le tissu est aussi serré & aussi dense que l'est celui du Gayac, une si grande quantité de Sel essentiel. La peine que j'avois à concilier mes idées avec l'expérience de M. Stahl, me fit prendre le parti de la réiterer d'après lui. Mais comme il ne suffisoit pas de tirer le Sel alkali de la décoction résineuse du Gayac, & qu'il falloit le comparer avec celui que fourniroit une pareille quantité de Gayac brulé à la façon ordinaire, j'en ai brulé de trois façons differentes. J'ai brulé le Gayac en morceaux, comme on le fait ordinairement; j'en ai brulé en râpures; & enfin j'ai fait bouillir, pour mon expérience, des râpures de Gayac, desquelles j'ai tiré la Résine par ce moyen, & ces mêmes râpures bouillies & dépouillées de leur partie grasse, je les ai fait secher, & les ai brulé ensuite.

De quelque façon que j'aye brulé le Gayac, soit en râpures qui eussent bouilli, soit en râpures qui n'eussent point bouilli, soit en substance, je veux dire en morceaux, j'en ai toujours brulé six livres à la fois. De ces trois façons differentes, la plus simple fut celle qui me donna à la premiere operation le plus de Sel lixiviel. Six livres de Gayac bru-

brulé en morceaux m'en fournirent un gros & 7 grains, c'est-à-dire, 79 grains. Pareil poids de râpures ne me donna que 39 grains. Je n'insisterai point ici sur la raison qui fit que les râpures me donnerent moins de Sel que le bois. Je dirai seulement que je crois qu'il y eut de ma faute, parce que je ne lessivai leurs cendres que deux fois, & peut-être une troisieme ou une quatrieme lessive m'auroient-elles donné encore assez de Sel lixiviel pour égaler la quantité que m'en avoit fourni le Gayac brulé en morceaux.

Je pris six autres livres de Gayac en morceaux, je le brulai, je le réduisis en cendres, que je calcinai ensuite dans le Creuset; elles ne me fournirent en deux évaporations que 51 grains de Sel, savoir 45 grains à la premiere, & 6 à la seconde. Je pris ensuite des râpures de Gayac, que j'avois fait bouillir pendant six heures, & qui pesoient six livres avant l'ébullition. Je les fis secher pour les bruler. Leurs cendres calcinées & lessivées me fournirent en trois évaporations 58 grains de Sel lixiviel. On voit par-là que si dans la premiere expérience le Gayac en morceaux l'avoit emporté par le produit du Sel lixiviel sur les râpures, dans celle-ci les râpures, quoique bouillies, & qui devoient avoir perdu une partie de leur Sel, l'ont cependant réciproquement emporté sur le bois.

Quand même j'aurois été bien persuadé de la vérité & de l'exactitude de l'expérience de M. Stahl, cette seule circonstance auroit suffi pour faire naitre mes doutes. Les râpures de Gayac bouillies & sechées, ref-

sembloient trop par leur produit au bois de Gayac brulé en morceaux, & en approchoient de trop près, pour que je pusse attendre de la matiere résineuse, provenant de la décoction épaissie, une quantité considerable de Sel lixiviel. Car comme il ne pouvoit se trouver de Sel dans cet extrait résineux, qu'à proportion de ce que pouvoient lui en avoir communiqué les râpures de Gayac, & par conséquent à proportion de ce qu'elles en avoient perdu, il n'étoit pas naturel d'attendre de cette matiere résineuse une grande quantité de Sel lixiviel, lorsque les râpures, qui avoient fourni dans la décoction cette même Résine, conservoient encore tant de Sel. J'aurois eu quelque sujet de me flater plus justement de l'esperance que donne M. Stahl, si j'avois vu que l'ébullition eût dépouillé mes râpures de Gayac de leur Sel, au point qu'elles ne m'en eussent presque pas fourni en les brulant, après les avoir fait sécher. Pour-lors il y auroit eu quelque raison d'attendre de la décoction épaissie la multiplication considerable de Sel fixe que M. Stahl en promet. Car à s'en rapporter aux termes dans lesquels s'exprime M. Stahl, il semble que le Gayac, dont on a tiré la teinture ou l'extrait par le moyen de l'ébullition, devienne, pour ainsi dire, une Tête-morte, & une matiere absolument dénuée de tout son Sel, & que tout ce Sel passe dans la décoction, dans laquelle il doit produire par l'incineration, en se combinant avec la partie grasse, une quantité de Sel lixiviel infiniment, & sans aucune comparaison, plus considera-

désirable que n'en donne le Gayac brulé à la façon ordinaire. Que M. Stahl regarde les râpures de Gayac qui ont bouilli comme une Tête-morte dénuée de son Sel essentiel, il n'y a presque pas lieu d'en douter; il paroît en faire si peu de cas, que, uniquement attentif au produit de l'extrait, il semble rejetter comme inutiles les râpures qui l'ont fourni, & ne conseille même pas de les bruler après en avoir tiré la Résine & le Sel par le moyen de la décoction. Il me reste maintenant à détailler mon expérience, telle que je l'ai faite d'après M. Stahl.

Je pris six livres de râpures de Gayac. Je les fis bouillir pendant six heures. J'en fis évaporer la décoction jusqu'à siccité. Il me resta de cette évaporation 7 gros de matiere résineuse, & ces 7 gros de matiere résineuse ne me donnerent, par la calcination & la lessive des cendres, que 4 grains de Sel lixiviel. Quoique la quantité de Sel lixiviel que m'avoient donné mes râpures bouillies & sechées, eût commencé à me faire soupçonner le peu que m'en fourniroit leur résidu résineux, un reste de préjugé pour une expérience citée par M. Stahl, & que je devois croire qu'il avoit fait lui-même, me tenoit encore en suspens, & j'avouerai que je vis avec surprise combien ma méfiance fut justifiée. J'avois travaillé auparavant de la même maniere douze livres de râpures de Gayac. J'en avois tiré 10 gros d'extrait résineux, qui ne m'avoient produit que 14 grains de Sel lixiviel. Mais il m'étoit arrivé un accident en faisant cette operation. Un grand Vaisseau de ter-

mais cela ne répondoit cependant pas, à beaucoup près, aux promesses de M. Stahl, ni au produit des six livres de râpures que je venois récemment de bruler sans les avoir dépouillé de leur partie grasse. Il y avoit encore loin de 32 à 90. J'étois bien sûr de mes râpures, elles étoient les mêmes; ainsi je devois en obtenir au moins la même quantité de Sel lixiviel par le procedé de M. Stahl, que par le mien. Cependant, tout le produit de la Résine calcinée & lessivée se bornoit à 32 grains. Il falloit donc que les râpures, qui avoient bouilli, conservassent ce qui manquoit de Sel à la décoction épaisse. Pour m'en assurer, j'eus encore recours à la calcination des cendres des râpures dont j'avois tiré la Résine. Six livres de ces râpures que j'avois employé pour la décoction, s'étoient réduites à cinq. Elles étoient beaucoup plus brunes que les autres qui m'étoient restées des operations précédentes. Je brulai ces cinq livres; les cendres qui en provinrent, ayant été bien calcinées, devinrent d'une couleur approchante d'un chamois un peu foncé. Elles se réduisirent en une poudre aussi fine que si elle eût été porphyrizée, & qui s'envoloit pour peu qu'on remuât le Creuset qui les contenoit. Ces cendres ne se pelotonnerent point, comme le font ordinairement, sur la fin de la calcination, celles qui contiennent beaucoup de Sel lixiviel. Leur secheresse & leur legereté me fit mal augurer d'abord de leur richesse, cependant ma prévention se trouva mal fondée. Ces cendres, tout arides qu'elles paroissoient,

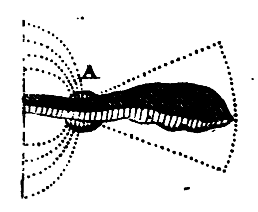
soient, m'ont donné un tiers & presque moitié plus de Sel lixiviel que celles du résidu résineux. J'ai fait de chacune de ces trois sortes de cendres six lessives. Les râpures qui n'avoient point bouilli, & qui avoient été brulées à la façon ordinaire, m'ont donné en tout 130 grains de Sel lixiviel. Les râpures qui avoient bouilli pendant douze heures entieres, & dont j'avois tiré la Résine, m'ont donné 78 grains. Et l'extrait résineux provenant de ces mêmes râpures bouillies, & duquel M. Stahl promet un produit si abondant, ne m'a donné que 47 grains & demi de Sel lixiviel.

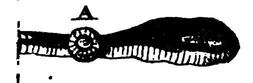
Il est aisé de voir, par le détail de cette derniere experience, que j'avois eu quelque raison de douter de l'exactitude & de la vérité de celle que rapporte M. Stahl. Tant s'en faut que les cendres de l'extrait résineux ne l'emportent par l'abondance de leur Sel lixiviel sur celles des râpures de Gayac brulé à la façon ordinaire, qu'au contraire elles le cedent en quantité, même aux cendres des râpures qui ont bouilli, desquelles cet extrait résineux est le produit. Il ne se trouve donc plus rien d'étonnant ni de mystérieux dans l'operation de M. Stahl. La décoction emporte une partie du Sel essentiel du Gayac, & le confond avec la partie grasse de ce bois; de-là il résulte dans la décoction épaissie, autant de Sel fixe que l'ébullition a ôté de Sel essentiel aux râpures. Ce qui en est resté aux râpures après l'ébullition, se retrouve en Sel lixiviel dans leurs cendres. Ainsi, tirer le Sel lixiviel du Gayac

à

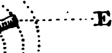
à la façon de M. Stahl, ce n'eſt que diviſer un tout en deux parties, c'eſt obtenir par deux operations ce qu'on peut obtenir par une ſeule, c'eſt augmenter la peine ſans augmenter le profit.

On me demandera peut-être, d'où vient que les cendres du Gayac qui a été brulé à la façon ordinaire, ont donné ſeules plus de Sel lixiviel que celles des râpures bouillies & de l'extrait réſineux jointes enſemble, puiſque celles-ci ont fourni quatre grains & demi moins que les autres. La réponſe eſt aiſée à faire. Après l'évaporation d'une leſſive, on a beau gratter le vaiſſeau dans lequel elle a été faite, quelque ſoin que l'on prenne, il y reſte toujours un peu de Sel, & cette petite quantité du Sel lixiviel qui s'attache au vaiſſeau eſt proportionnée à l'étendue de la ſurface de ce même vaiſſeau. Quelque peu ſenſible que paroiſſe ce déchet dans une ſeule évaporation, il doit le devenir, & augmenter après pluſieurs operations. Les râpures de Gayac, qui m'ont ſervi dans ces dernieres expériences, étoient les mêmes, puiſque je n'avois fait qu'en partager douze livres en deux parts. Elles devoient par conſéquent contenir autant de Sel les unes que les autres. Mais ces trois ſortes de cendres ont été leſſivées chacune ſix fois, comme je l'ai déja dit. Regardons maintenant les cendres du réſidu réſineux & celles des râpures bouillies, comme deux parties ne faiſant qu'un même tout, c'eſt-à-dire, comme les cendres de ſix livres de Gayac. Il s'enſuivra que ces cendres-ci ont ſouffert le dé-



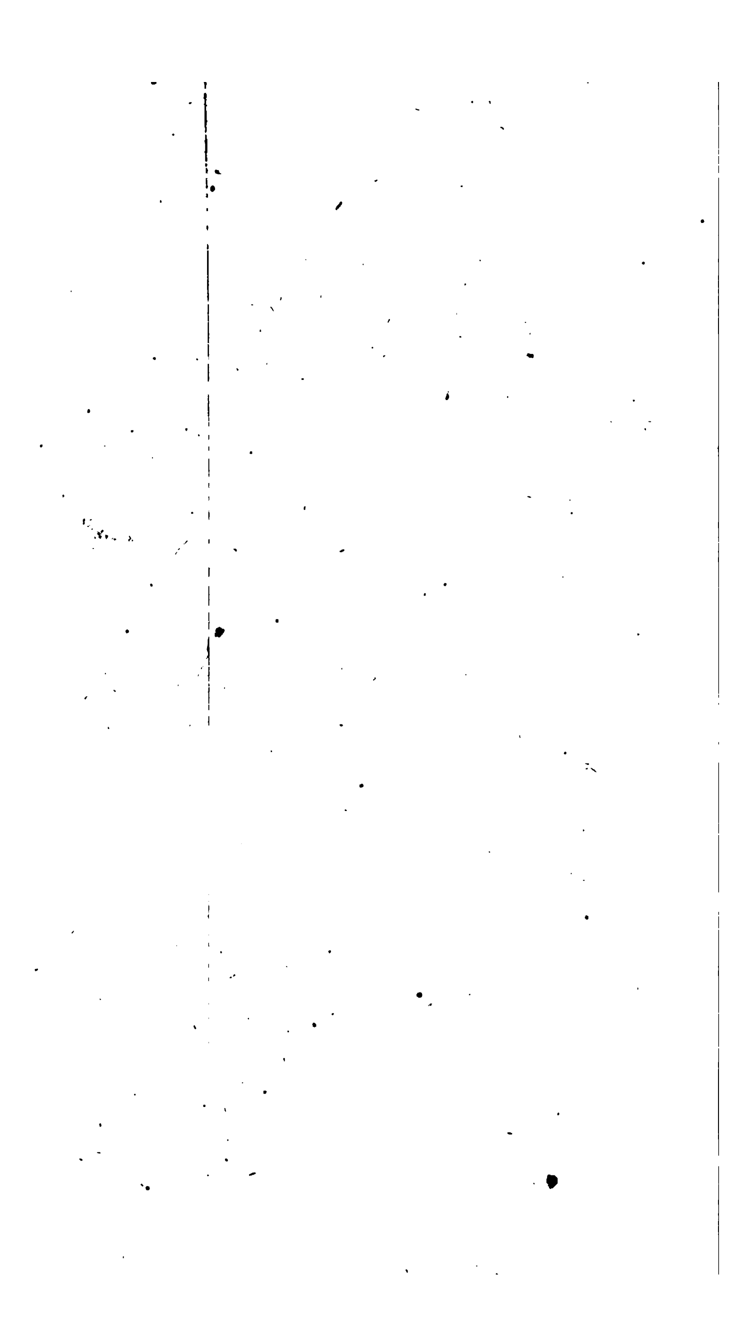


...rdinella marina.



C

B



déchet de douze operations, pendant que celles des six livres qui ont été brulées à la façon ordinaire, n'ont souffert que le déchet de six évaporations. Supposé que celles-ci ayent perdu à chaque évaporation trois quarts de grain de Sel lixiviel, ce qui est peu de chose, & ce qui fera en tout quatre grains & demi pour les six évaporations, il s'ensuivra que les autres en auront perdu neuf.

Je ne dirai rien ici sur la nature du Sel lixiviel du Gayac. J'ai cru avoir lieu de penser, pour plusieurs raisons, qu'il n'étoit gueres alkali, peut-être même pourroit-il se faire qu'il ne le fût point du tout. En ce cas, M. Stahl auroit bien perdu de la peine à en expliquer la formation. Je n'ose pourtant pas encore prononcer que ce Sel ne soit absolument point Alkali. Mais ce que je puis avancer avec certitude, c'est que s'il l'est, il l'est peu. Je renvoye cette discussion à un autre Mémoire, dans lequel je me propose d'examiner les varietés qui se rencontrent entre differens Sels lixiviels.

EXA-

EXAMEN ET RESOLUTION DE QUELQUES QUESTIONS SUR LES JEUX.

Par M. NICOLE. *

ON peut considerer tous les Jeux, que l'amusement ou le desir d'augmenter son argent ont inventés, sous deux especes. La premiere espece renferme les Jeux où le hazard seul a part, & qui par leur nature mettent les Joueurs dans differentes conditions, ensorte que l'un ait avantage sur l'autre, comme dans les Jeux de la Bassette, du Pharaon, & des Trois Dés, &c. La seconde espece renferme les Jeux où le hazard étant égal pour les Joueurs, comme dans le Piquet, &c. les forces ou degrés d'habileté entre les Joueurs sont differens.

Entre les divers Problêmes que l'on peut proposer sur chacune de ces deux especes de Jeux, il y en a qui leur sont communs, la plus grande probabilité de gagner pour l'un des Joueurs, pouvant venir également de la nature du Jeu qui lui donne de l'avantage, ou de la supériorité d'habileté.

La question que l'on examine ici est de cette espece, elle m'a été faite plusieurs fois par

* 11 Fevrier 1730.

par de gros Joueurs : la voici.

Deux Joueurs jouent une partie à un Jeu quelconque, par exemple, au Piquet ; l'un des Joueurs a plus de probabilité de gagner cette partie, qu'il n'en a de la perdre ; on demande, lorsque ces Joueurs conviennent de jouer un certain nombre de parties, si le Joueur supérieur a toujours le même avantage sur l'autre, ou le même degré de probabilité de gagner plus de parties que l'autre ; ou si cette probabilité augmente, on demande selon quelle loi se fait cette augmentation.

PROBLEME.

Deux Joueurs, dont les forces sont entre elles comme p *&* q, *jouent au Piquet un certain nombre de parties : on demande quelle probabilité il y a que le Joueur le plus fort gagne, ce que les Joueurs appellent la* queue des paris, *& quel est son avantage. Celui qui perd, est celui qui est marqué le plus de fois dans le cours des parties que l'on est convenu de jouer.*

Pour résoudre ce Problême, il faut découvrir d'abord quel est l'avantage de ce Joueur, lorsque l'on ne joue que deux parties, ensuite lorsque l'on en joue quatre, puis six, huit, dix, & enfin le nombre dont on est convenu. Car il est clair que son fort, lorsque l'on en joue douze, par exemple, doit résulter de l'examen des differens états dans lesquels cette partie de Jeu peut se trouver dans tout le cours de ces douze parties, & que quelques-uns de ces états

états répondent à la ſituation où ſeroient les deux Joueurs, s'ils ne jouoient qu'en deux parties, ou en quatre, ſix, huit & dix.

SOLUTION.

J'appelle *Pierre* le premier Joueur, dont la force eſt exprimée par p, & *Paul* le ſecond Joueur, dont la force eſt exprimée par q; p eſt plus grand que q.

Soit ſuppoſé qu'ils jouent d'abord en deux parties, ſoit nommé a l'argent que l'on gagne, lorſque l'on gagne le pari. Cela poſé:

Si l'on nomme f le ſort de Pierre que l'on cherche, x ſon ſort lorſqu'il gagne la premiere partie, & y lorſqu'il la perd, on aura ces Equations, $f = \frac{\overset{1.0}{p\times x} + \overset{0.1}{q\times y}}{p+q}$, $x = \frac{\overset{2.0}{p\times a} + \overset{1.1}{q\times 0}}{p+q}$ & $y = \frac{\overset{1.1}{p\times 0} + \overset{0.2}{q\times -a}}{p+q}$, dans leſquelles les nombres qui ſont écrits au-deſſus de chaque membre de ces Equations, ſervent à exprimer ce que chaque Joueur a gagné de parties. Donc $f = \frac{p\times ap + q\times -aq}{\overline{p+q}^{\,2}} = \frac{app - aqq}{\overline{p+q}^{\,2}}$, qui eſt le ſort de Pierre, ou ſon avantage, lorſque l'on joue en deux parties.

Soit ſuppoſé maintenant que ces Joueurs jouent en quatre parties.

Si l'on nomme f le ſort de Pierre que l'on cherche, x ſon ſort lorſqu'il gagne la premiere partie, y lorſqu'il la perd; z ſon ſort, lors-

lorsqu'ayant gagné la premiere partie, il gagne encore la seconde; r son sort, lorsqu'ayant gagné les deux premieres parties, il perd la troisieme, on aura ces Equations,

$$s = \frac{p \times \overset{1.0}{x} + q \times \overset{0.1}{y}}{p+q}, \quad x = \frac{p \times \overset{2.0}{z} + q \times \overset{1.1}{\frac{app-aqq}{(p+q)^2}}}{p+q},$$

$$z = \frac{p \times \overset{3.0}{a} + q \times \overset{2.1}{r}}{p+q}, \quad r = \frac{p \times \overset{3.1}{a} + q \times \overset{2.2}{0}}{p+q} = \frac{ap}{p+q}.$$ Donc

$$z = \frac{ap}{p+q} + \frac{apq}{(p+q)^2} = \frac{app + 2apq}{(p+q)^2}$$ &

$$x = \frac{ap^3 + 2appq + appq - aq^3}{(p+q)^3} = \frac{ap^3 + 3appq - aq^3}{(p+q)^3}.$$

Pour déterminer y, soit encore nommé t le sort de Pierre, lorsqu'ayant perdu la premiere partie, il perd encore la seconde; & u son sort, lorsqu'ayant perdu les deux premieres parties, il gagne la troisieme; on aura ces nouvelles Equations,

$$y = \frac{p \times \overset{1.1}{\frac{app-aqq}{(p+q)^2}} + q \times \overset{0.2}{t}}{p+q}, \quad t = \frac{p \times \overset{1.2}{u} + q \times \overset{0.3}{-a}}{p+q}$$

$$u = \frac{p \times \overset{2.2}{0} + q \times \overset{1.3}{-a}}{p+q} = -\frac{qa}{p+q}.$$ Donc $t =$

$$-\frac{apq}{(p+q)^2} - \frac{qa}{p+q} = -\frac{2apq - aqq}{(p+q)^2},$$ &

$$y = \frac{ap^3 - apqq - 2apqq - aq^3}{\overline{p+q}^3} = \frac{ap^3 - 3apqq - aq^3}{\overline{p+q}^3};$$

& en ſubſtituant dans la premiere Equation pour x & y leurs valeurs, il vient

$$s = \frac{ap^4 + 3ap^3q - apq^3 + ap^3q - 3apq^3 - aq^4}{\overline{p+q}^4}$$

$$= \frac{ap^4 + 4ap^3q - 4apq^3 - aq^4}{\overline{p+q}^4}$$ qui eſt le ſort cherché de Pierre, ou ſon avantage, lorſque l'on joue en quatre parties.

Si l'on ſuppoſe maintenant que l'on joue en ſix parties, en employant autant d'inconnues que l'on en a beſoin, on aura toutes les Equations ſuivantes, $s = \dfrac{p \times \overset{1.0}{x} + q \times \overset{0.1}{y}}{p+q}$,

$$x = \frac{p \times \overset{2.0}{z} + q \times \overset{1.1}{\dfrac{ap^4 + 4ap^3q - 4apq^3 - aq^4}{\overline{p+q}^4}}}{p+q},$$

$$z = \frac{p \times \overset{3.0}{r} + q \times \overset{2.1}{t}}{p+q}, \quad r = \frac{p \times \overset{4.0}{a} + q \times \overset{3.1}{u}}{p+q},$$

$$u = \frac{p \times \overset{4.1}{a} + q \times \overset{3.2}{m}}{p+q}, \quad m = \frac{p \times \overset{4.2}{a} + q \times \overset{3.3}{o}}{p+q} = \frac{ap}{p+q}.$$

Donc $u = \dfrac{ap}{p+q} + \dfrac{apq}{\overline{p+q}^2} = \dfrac{app + 2apq}{\overline{p+q}^2}$,

r

$r = \frac{ap}{p+q} + \frac{appq+2apqq}{\overline{p+q}^3} = \frac{ap^3+3appq+3apqq}{\overline{p+q}^3}$.

Pour déterminer t, on a

$$t = \frac{p \times \overset{3.1}{\frac{app+2apq}{\overline{p+q}^2}} + q \times \overset{2.2}{\frac{app-aqq}{\overline{p+q}^2}}}{p+q}$$

$= \frac{ap^3+3appq-aq^3}{\overline{p+q}^3}$. Donc

$z = \frac{ap^4+4ap^3q+6appqq-aq^4}{\overline{p+q}^4}$. D'où enfin on a $x = \frac{ap^5+5ap^4q+10ap^3qq-5apq^4-aq^5}{\overline{p+q}^5}$.

Pour déterminer y, on a ces autres Equations $y = \frac{p \times \overset{1.1}{\frac{ap^4+4ap^3q-4apq^3-aq^4}{\overline{p+q}^4}} + q \times \overset{0.2}{k}}{p+q}$

$k = \frac{p \times \overset{1.2}{f} + q \times \overset{0.3}{h}}{p+q}$, $f = \frac{p \times \overset{2.2}{\frac{app-aqq}{\overline{p+q}^2}} + q \times \overset{1.3}{e}}{p+q}$,

$e = \frac{p \times \overset{2.3}{d} + q \times \overset{1.4}{-a}}{p+q}$, $d = \frac{p \times \overset{3.3}{0} + q \times \overset{2.4}{-a}}{p+q}$

$= -\frac{qa}{p+q}$. Donc $e = -\frac{pqa}{\overline{p+q}^2} - \frac{qa}{p+q}$.

$= -\frac{2apq - aqq}{\overline{p+q}^{2}}$, donc $f = \frac{ap^{3} - 3apqq - aq^{3}}{\overline{p+q}^{3}}$;

on a auſſi $b = \frac{p \times \overset{1.3}{-\frac{2apq-aqq}{\overline{p+q}^{2}}} + q \overset{0.4}{\times} - a}{p+q}$

$= -\frac{3appq - 3apqq - aq^{3}}{\overline{p+q}^{3}}$, donc

$k = \frac{ap^{4} - 6appqq - 4apq^{3} - aq^{4}}{\overline{p+q}^{4}}$, & enfin

$y = \frac{ap^{5} + 5ap^{4}q - 10appq^{3} - 5apq^{4} - aq^{5}}{\overline{p+q}^{5}}$.

Et en ſubſtituant dans la premiere Equation, pour x & y, les valeurs trouvées, il vient

$f = \frac{ap^{6} + 6ap^{5}q + 15ap^{4}qq - 15appq^{4} - 6apq^{5} - aq^{6}}{\overline{p+q}^{6}}$

pour le ſort cherché de Pierre, ou ſon avantage, lorſque l'on joue en ſix parties.

Soit ſuppoſé maintenant que l'on joue en huit parties, & que A repréſente le ſort de Pierre, lorſque l'on joue en deux parties, B lorſque l'on joue en quatre parties, C lorſque l'on joue en ſix parties.

Si l'on employe autant d'inconnues que l'on en a beſoin, on aura toutes les Equations ſuivantes, $f = \frac{p \times \overset{1.0}{x} + q \times \overset{0.1}{y}}{p+q}$, $x = \frac{p \times \overset{2.0}{z} + q \times \overset{1.2}{e}}{p+q}$,

e

$s = \frac{\overset{3.0}{p}\times n + \overset{2.1}{q}\times s}{p+q}$, $n = \frac{\overset{4.0}{p}\times r + \overset{3.1}{q}\times n}{p+q}$, $r = \frac{\overset{5.0}{p}\times a + \overset{4.1}{q}\times m}{p+q}$,

$m = \frac{\overset{5.1}{p}\times a + \overset{4.2}{q}\times k}{p+q}$, $k = \frac{\overset{5.2}{p}\times a + \overset{4.3}{q}\times l}{p+q}$, $l = \frac{\overset{5.3}{p}\times a + \overset{4.4}{q}\times 0}{p+q}$

$= \frac{ap}{p+q}$. Donc $k = \frac{app + 2apq}{\overline{p+q}^{2}}$, $m = \frac{ap^3 + 3appq + 3apq^2}{\overline{p+q}^{3}}$

& $r = \frac{ap^4 + 4ap^3q + 6appqq + 4apq^3}{\overline{p+q}^{4}}$.

On trouvera aussi $n = \frac{\overset{4.1}{p}\times\frac{ap^3 + 3appq + 3apqq}{\overline{p+q}^{3}} + \overset{3.0}{q}\times h}{p+q}$,

$h = \frac{\overset{4.2}{p}\times\frac{app + 2apq}{\overline{p+q}^{2}} + \overset{3.3}{q}\times A}{p+q} = \frac{ap^3 + 3appq - aq^3}{\overline{p+q}^{3}}$.

Donc $n = \frac{ap^4 + 4ap^3q + 6appqq - aq^4}{\overline{p+q}^{4}}$; & en substituant pour r & n les valeurs que l'on vient de trouver, il vient

$s = \frac{ap^5 + 5ap^4q + 10ap^3qq + 10appq^3 - aq^5}{\overline{p+q}^{5}}$.

Pour trouver la valeur de t, on a

$$z = \frac{p \times \frac{\overline{ap^4 + 4ap^3q + 6appqq - aq^4}^{\,3.1 \qquad 1.5}}{\overline{p+q}^{\,4}} + q \times \overset{2.2}{B}}{p+q}$$

$$= \frac{ap^5 + 5ap^4q + 10ap^3q^2 - 5apq^4 - aq^5}{\overline{p+q}^{\,5}}. \text{ Donc}$$

$$= \frac{ap^6 + 6ap^5q + 15ap^4qq + 20ap^3q^3 - 6apq^5 - aq^6}{\overline{p+q}^{\,6}}, \text{ \& enfin}$$

$$= \frac{ap^7 + 7ap^6q + 21ap^5qq + 35ap^4q^3 - 21appq^5 - 7apq^6 - aq^7}{\overline{p+q}^{\,7}}.$$

Pour déterminer y, on a toutes ces Equations $y = \frac{p \times \overset{1.1}{C} + q \times \overset{0.2}{g}}{p+q}$, $g = \frac{p \times \overset{1.2}{f} + q \times \overset{0.3}{e}}{p+q}$, $f = \frac{p \times \overset{2.2}{B} + q \times \overset{1.3}{d}}{p+q}$, $d = \frac{p \times \overset{2.3}{c} + q \times \overset{1.4}{b}}{p+q}$, $c = \frac{p \times \overset{3.3}{A} + q \times \overset{2.4}{Y}}{p+q}$, $Y = \frac{p \times \overset{3.4}{X} + q \times \overset{2.5}{-a}}{p+q}$, $X = \frac{p \times \overset{4.4}{o} + q \times \overset{3.5}{-a}}{p+q} = -\frac{aq}{p+q}$. Donc $Y = -\frac{2apq - aqq}{\overline{p+q}^{\,2}}$, & $c = \frac{ap^3 - 3apqq - aq^3}{\overline{p+q}^{\,2}}$. Pour trouver la valeur de b, on a $b = \frac{p \times \overset{2.4}{Z} + q \times \overset{1.5}{-a}}{p+q}$,

Z

$$Z = \frac{p \overset{3.4}{\times} - \frac{aq}{p+q} + q \overset{2.5}{\times} - a}{p+q} = - \frac{2apq - aqq}{\overline{p+q}^{2}},$$

donc $b = - \frac{3appq - 3apq^{2} - aq^{3}}{\overline{p+q}^{3}}$; ainsi en substituant les valeurs de b & c, il vient

$$d = \frac{ap^{4} - 6appqq - 4apq^{3} - aq^{4}}{\overline{p+q}^{4}}, \text{ donc}$$

$$f = \frac{ap^{5} + 5ap^{4}q - 10appq^{3} - 5apq^{4} - aq^{5}}{\overline{p+q}^{5}}.$$

Pour trouver la valeur de e, on a

$$e = \frac{p \times \overline{\overset{1.3}{} \frac{ap^{4} - 6appqq - 4apq^{3} - aq^{4}}{\overline{p+q}^{4}} \overset{5}{}} + q \overset{0.4}{\times} V}{p+q},$$

$$V = \frac{p \times - \overline{\overset{1.4}{} \frac{3appq - 3apqq - aq^{3}}{\overline{p+q}^{3}}} + q \overset{0.5}{\times} - a}{p+q}$$

$$= - \frac{4ap^{3}q - 6appqq - 4apq^{3} - aq^{4}}{\overline{p+q}^{4}}, \text{ donc}$$

$$e = \frac{ap^{5} - 10ap^{3}qq - 10appq^{3} - 5apq^{4} - aq^{5}}{\overline{p+q}^{5}}.$$

Maintenant si l'on substitue pour f & e les valeurs trouvées, on aura

$$g = \frac{ap^{6} + 6ap^{5}q - 20ap^{3}q^{3} - 15appq^{4} - 6apq^{5} - aq^{6}}{\overline{p+q}^{6}}.$$

Donc enfin $y = \frac{ap^7 + 7ap^6q + 21ap^5qq - 35ap^3q^4 - 21ap^2q^5 - 7apq^6 - aq^7}{\overline{p+q}^7}$;

Et en substituant, dans la premiere Equation, pour x & y les valeurs trouvées, il vient $s = \frac{ap^8 + 8ap^7q + 28ap^6q^2 + 56ap^5q^3 - 56ap^3q^5 - 28appq^6 - 8apq^7 - aq^8}{\overline{p+q}^8}$

qui est le sort cherché de Pierre, ou son avantage, lorsque l'on joue en huit parties.

On pourroit, par la même voye, déterminer le sort de Pierre, lorsque l'on joue dix parties, & ensuite lorsque l'on en joue un plus grand nombre; mais le nombre des Equations, qu'il faudroit parcourir pour résoudre ces autres cas, devenant fort considerable, il est plus simple, pour les résoudre, d'examiner les grandeurs qui ont été trouvées pour les cas précédens, de les comparer entre elles, & de découvrir par cette comparaison la loi selon laquelle elles croissent. Les grandeurs, qui ont été trouvées, sont

$\frac{app - aqq}{\overline{p+q}^2}$, pour 2 parties.

$\frac{ap^4 + 4ap^3q - 4apq^3 - aq^4}{\overline{p+q}^4}$, pour 4 parties.

$\frac{ap^6 + 6ap^5q + 15ap^4qq - 15appq^4 - 6apq^5 - aq^6}{\overline{p+q}^6}$, pour 6 parties.

$\frac{ap^8 + 8ap^7q + 28ap^6qq + 56ap^5q^3 - 56ap^3q^5 - 28appq^6 - 8apq^7 - aq^8}{\overline{p+q}^8}$, pour 8 parties.

qui se réduisent, en divisant les numérateurs & les dénominateurs par $p+q$,

à $\frac{ap - aq}{p+q}$, pour 2 parties.

à $\frac{ap^3 + 3appq - 3apqq - aq^3}{\overline{p+q}^3}$, pour 4 parties.

à $\frac{ap^5 + 5ap^4q + 10ap^3qq - 10appq^3 - 5apq^4 - aq^5}{\overline{p+q}^5}$, pour 6 parties.

à $\frac{ap^7 + 7ap^6q + 21ap^5qq + 35ap^4q^3 - 35ap^3q^4 - 21appq^5 - 7apq^6 - aq^7}{\overline{p+q}^7}$, pour 8 parties.

à $\frac{ap^9 + 9ap^8q + 36ap^7qq + 84ap^6q^3 + 126ap^5q^4 - 126ap^4q^5 - 84ap^3q^6 - 36appq^7 - 9apq^8 - aq^9}{\overline{p+q}^9}$,

pour 10 parties.

à $a \times \left\{ \frac{p^{11} + 11p^{10}q + 55p^9q^2 + 165p^8q^3 + 330p^7q^4 + 462p^6q^5 - 462p^5q^6 - 330p^4q^7 - 165p^3q^8 - 55p^2q^9 - 11pq^{10} - q^{11}}{\overline{p+q}^{11}} \right.$

pour 12 parties.

On aura donc pour 24 parties, ou douze Rois,

$$a \times \left\{ \frac{\begin{array}{l} p^{23} + 23p^{22}q + 253p^{21}q^2 + 1771p^{20}q^3 + 8855p^{19}q^4 + 33649p^{18}q^5 + 100947p^{17}q^6 \\ + 245157p^{16}q^7 + 490314p^{15}q^8 + 817190p^{14}q^9 + 1144066p^{13}q^{10} + 1352078p^{12}q^{11} \\ - 1352078p^{11}q^{12} - 1144066p^{10}q^{13} - 817190p^9q^{14} - 490314p^8q^{15} - 245157p^7q^{16} \\ - 100947p^6q^{17} - 33649p^5q^{18} - 8855p^4q^{19} - 1771p^3q^{20} - 253p^2q^{21} - 23pq^{22} - q^{23} \end{array}}{\overline{p+q}^{23}} \right.$$

Si

Si $p=5$ & $q=4$,

On aura $a \times \frac{5-4}{9} = \frac{1}{9}\,a$ pour 2 parties.

$a \times \frac{425-304}{729} = \frac{121\,a}{729}$ pour 4 parties.

$a \times \frac{35625-23424}{59049} = \frac{122014}{59049}$ pour 6 parties.

$a \times \frac{2965625-1817844}{4782969} = \frac{1148281\,a}{4782969}$ pour 8 parties.

$a \times \frac{242359625-141604864}{383964489} = \frac{100754761\,a}{383964489}$ pour 10 parties.

$a \times \frac{20314265625-11066793984}{31381059609} = \frac{9247471641\,a}{31381059609}$, pour 12 parties.

Et $a \times \frac{6176771821635009765625}{8862938119652501095929}$, ou environ $a \times \frac{193}{277}$ pour 24 parties.

Cette dernière grandeur est entre $\frac{2}{3}\,a$ & $\frac{3}{4}\,a$. Ainsi dans la supposition, que les forces ou habiletés des Joueurs soient comme 5 à 4, l'avantage qu'a le Joueur le plus fort sur le plus foible n'est que la neuvieme partie de ce qui est

au Jeu, lorſqu'ils jouent en deux parties; & cet avantage devient un peu plus des deux tiers de ce qui eſt au Jeu, lorſqu'ils jouent en vingt-quatre parties. Lors donc que dans cette ſuppoſition deux Joueurs jouent au Picquet, & mettent au Jeu chacun neuf Louis pour ce que l'on appelle la queue des paris, le Joueur le plus foible fait préſent à l'autre de 6 Louis 13 liv. 0 ſ. 2 den. des neuf Louis qu'il a mis au Jeu.

REMARQUE I.

Les grandeurs qui ont été trouvées dans les cas que l'on vient d'examiner, & qui expriment l'avantage du Joueur le plus fort; ces grandeurs, dis-je, étant compoſées de termes poſitifs & de termes négatifs, il eſt clair que la ſomme de tous les poſitifs exprimera le ſort du Joueur le plus fort, ou ſon droit à la partie, & que la ſomme de tous les négatifs exprimera le ſort du plus foible, ou le droit qu'il a à cette partie; car l'avantage n'eſt autre choſe que l'excès du ſort de l'un ſur le ſort de l'autre.

Ainſi, pour deux parties,

Le ſort de l'un ſera $\frac{p}{p+q} \times a$. Et le ſort de l'autre ſera $\frac{q}{p+q} \times a$.

Pour quatre parties

$$\frac{\overline{p^3 + 3ppq}}{\overline{p+q}^3} \times a. \quad \text{Et} \quad \frac{\overline{3pqq + q^3}}{\overline{p+q}^3} \times a.$$

Pour

Pour six parties

$$\frac{p^5+5p^4q+10p^3qq}{\overline{p+q}^5}\times a. \text{ Et } \frac{10ppq^3+5pq^4+q^5}{\overline{p+q}^5}\times a.$$

Pour huit parties

$$\frac{p^7+7p^6q+21p^5qq+35p^4q^3}{\overline{p+q}^7}\times a.$$

$$\text{Et } \frac{35p^3q^4+21ppq^5+7pq^6+q^7}{\overline{p+q}^7}\times a.$$

Pour dix parties

$$\frac{p^9+9p^8q+36p^7qq+84p^6q^3+126p^5q^4}{\overline{p+q}^9}\times a.$$

$$\text{Et } \frac{126p^4q^5+84p^3q^6+36ppq^7+9pq^8+q^9}{\overline{p+q}^9}\times a.$$

D'où l'on voit que pour avoir le sort de chacun des deux Joueurs, lorsqu'ils jouent un nombre quelconque de parties, il faut élever le binome $p+q$ à une puissance dont l'exposant soit moindre d'une unité que le nombre de parties que l'on doit jouer, diviser en deux parties ce binome ainsi élevé, dont la première sera composée de tous les premiers termes jusqu'au milieu, & la seconde, de tous les derniers termes pris depuis le milieu. Chacune de ces parties étant le numérateur d'une fraction, dont le dénominateur est la puissance entiere, exprimera le sort de chacun des Joueurs, & l'excès de

l'une de ces fractions sur l'autre exprimera l'avantage du Joueur le plus fort.

REMARQUE II.

Si l'on avoit cherché par une voye semblable à celle que l'on a suivie ici, le sort des Joueurs & l'avantage de l'un sur l'autre, lorsqu'ils jouent en un nombre impair de parties, on auroit trouvé les mêmes formules que l'on a trouvées, en supposant ce nombre de parties exprimé par le nombre pair qui le suit; ensorte que le sort est le même, soit que l'on joue en une ou deux parties; il est encore le même, soit que l'on joue en trois ou quatre parties, cinq ou six parties, & ainsi des autres.

Ceci peut faire difficulté à la premiere vue; car il est visible que le Joueur le plus fort a d'autant plus d'avantage que l'on joue en un plus grand nombre de parties; ainsi par cette considération il doit avoir plus d'avantage, lorsque l'on joue en six parties, que lorsque l'on joue en cinq parties. Mais cet avantage est diminué dans le cas de six parties, en ce que ce Joueur, pour gagner, doit gagner deux parties plus que l'autre, car en ce cas, pour gagner, il faut qu'il prenne quatre parties, & l'autre deux; au lieu que dans le cas de cinq parties, il suffit qu'il prenne une partie plus que l'autre, c'est-à-dire, trois parties, & l'autre deux: ainsi, par cette seconde consideration, l'avantage du Joueur le plus fort doit être diminué, car il est évident qu'il est plus difficile de gagner deux parties plus

plus que l'autre, qu'il ne l'eſt d'en gagner ſeulement une de plus. Cette réflexion ſuffit pour faire voir la poſſibilité de ce que donne le calcul, car le même raiſonnement aura lieu pour tout nombre pair de parties comparé au nombre impair qui le précéde.

COROLLAIRE I.

Si l'on ſuppoſe $p = q$, & que l'on ſubſtitue dans la Table qui exprime l'avantage du Joueur le plus fort, pour q, ſa valeur p, on verra que cet avantage devient nul dans tous les cas, c'eſt-à-dire, quel que ſoit le nombre de parties que l'on joue. Et ſi l'on ſubſtitue p à la place de q, dans la Table qui exprime le ſort des deux Joueurs, on trouvera $\frac{1}{2}$ pour le ſort de chaque Joueur, quel que ſoit le nombre de parties que l'on joue; & c'eſt auſſi ce qui doit arriver.

COROLLAIRE II.

Si avant la fin des parties que l'on eſt convenu de jouer, on étoit obligé de quitter le jeu, & que l'on voulût découvrir de quelle maniere il faut partager l'argent du jeu relativement à l'état où eſt la partie, lorſque l'on ceſſe de jouer: on trouvera de quelle maniere il faut faire ce partage, & quel eſt l'avantage ou le deſavantage des Joueurs, en examinant entre toutes les Equations que l'on a été obligé de parcourir, quelle eſt celle qui renferme le cas propoſé; & cette Equation donnera ce qu'on cherche.

Si l'on demande, par exemple, quel est l'avantage de Pierre, qui est le Joueur le plus fort, lorsque l'état de la partie est telle, que jouant en huit parties, ce Joueur en a quatre, & l'autre deux, l'Equation de ce cas a été trouvée $k = \frac{app + 2apq}{\overline{p+q}^2}$ pour l'avantage de Pierre, qui dans la supposition de $p = 5$ & $q = 4$, donne $\frac{65}{81}a$ pour cet avantage; d'où il suit que ce qui appartient à l'un des Joueurs est $\frac{73}{81}a$, & ce qui appartient à l'autre est $\frac{8}{81}a$, c'est-à-dire, qu'il faut que Paul donne à Pierre $\frac{65}{81}a$.

Si l'état de la partie est tel, que Pierre a deux points, & Paul quatre, lorsque l'on joue en huit points, l'Equation de ce cas est $r = -\frac{2apq - aqq}{\overline{p+q}^2}$, qui est l'avantage de Pierre; mais comme cette grandeur est négative, elle exprime ce que Pierre doit payer à Paul, ou l'avantage de Paul, qui dans la supposition de $p = 5$ & $q = 4$, est $-\frac{24}{81}a$; c'est-à-dire, que Pierre doit payer à Paul $\frac{24}{81}a$, & les sorts seront comme $\frac{57}{162}$ à $\frac{105}{162}$. Il en sera ainsi des autres que l'on voudra imaginer.

DE LA MECHANIQUE

avec laquelle diverses Especes de Chenilles, & d'autres Insectes, plient & roulent des feuilles de Plantes & d'Arbres, & sur-tout celles du Chêne.

Par M. DE REAUMUR. *

IL ne faut point avoir fait une étude particuliere de l'Histoire naturelle, pour avoir vu dans des Jardins, dans des Bois, certaines feuilles simplement courbées, d'autres pliées en deux, d'autres roulées plusieurs fois sur elles-mêmes, d'autres ramassées en un paquet informe; & pour avoir remarqué que ces feuilles sont tenues, dans ces differens états, par un grand nombre de fils. Nos Poiriers, nos Pommiers, nos Groseliers, & bien d'autres Arbres & d'autres Plantes, mettent chaque jour sous les yeux de ces sortes de feuilles. On a pu encore observer que le milieu de ces feuilles est souvent occupé par un Insecte, & ordinairement par une Chenille. Le Chêne, le meilleur de tous les Arbres pour nos usages, est aussi le plus amusant pour un Naturaliste; M. Valisnieri assure qu'il nourrit seul plus de deux cens differentes especes d'Insectes; je n'ai pas compté celles que j'y ai observées, mais je ne crois pas

* 8 Mars 1719.

pas qu'elles aillent loin de ce nombre. Il est aussi de tous les Arbres celui où l'on voit plus de feuilles pliées & roulées: on y en apperçoit qui le sont avec une régularité qui donne envie de savoir comment des Insectes peuvent venir à bout de les contourner de la sorte; ces Insectes sont des Chenilles. J'ai cherché à découvrir la méchanique à laquelle elles ont recours pour faire si bien prendre la forme de Rouleaux, ou de Cornets, à des feuilles. Je vais expliquer celle qu'elles m'ont laissé voir, & ce sera, je crois, avoir expliqué celle dont se servent quantité d'autres Insectes qui font des ouvrages du même genre, mais moins parfaits.

Si l'on considere les feuilles des Chênes, vers le milieu du Printems, lorsqu'elles se sont entierement dévelopées & étendues, on en apperçoit plusieurs roulées de differentes manieres, toutes capables de leur attirer de l'attention. La partie supérieure du bout des unes paroît avoir été ramenée vers le dessous de la feuille, pour y décrire le premier tour d'une Spirale, qui a été ensuite recouvert de plusieurs autres tours, fournis par des roulemens successifs, & poussés quelquefois jusqu'au milieu de la feuille, & quelquefois par-delà *. Nos doigts ne pourroient mieux faire pour rouler régulierement une feuille, que ce qu'on voit ici; les Oublies ne sont pas mieux roulées. Le centre du rouleau est vuide: c'est un tuyau creux, dont le diametre est proportionné à celui du corps d'une Chenille, qui l'habite, & qui l'a fait pour l'habiter. D'autres feuilles des

* Fig. 1.

des mêmes Arbres (mais le nombre de celles-ci est plus petit) sont roulées vers le dessus, comme les premieres le sont vers le dessous. D'autres, en grand nombre, sont roulées vers le dessous de la feuille comme les premieres, mais dans des directions totalement differentes. La longueur ou l'axe des premiers rouleaux est perpendiculaire à la principale nervûre & à la queue de la feuille, la longueur de ceux-ci est parallele à la même nervûre *. Le roulement de celles-ci n'est quelquefois poussé que jusqu'à la principale nervûre, & quelquefois la largeur entiere de la feuille est roulée †. Les axes, ou longueurs de divers autres rouleaux sont obliques à la principale nervûre, leurs obliquités varient sous une infinité d'angles, de façon néanmoins que l'axe du rouleau prolongé rencontre ordinairement la grosse nervûre du côté du bout de la feuille ‡. Quoique la surface des rouleaux soit quelquefois très unie, & telle que la donne celle d'une feuille assez lisse, il y en a pourtant qui ont des inégalités, des enfoncemens, tels que les donneroit une feuille chiffonnée.

De pareils ouvrages ne seroient pas bien difficiles à faire à qui a des doigts, mais les Chenilles n'ont ni doigts ni parties qui semblent équivalentes. D'ailleurs, d'avoir roulé les feuilles, c'est avoir fait au plus la moitié de la besogne, il faut les contenir dans un état d'où leur ressort naturel tend continuellement à les tirer. La méchanique à laquelle elles

* Fig. 2. † Fig. 3. ‡ Fig. 10.

elles ont recours pour cette seconde partie de l'ouvrage, est aisée à observer. On voit des paquets de fils, attachés par un bout à la surface extérieure du rouleau, & par l'autre au plat de la feuille*; ce sont autant de liens, autant de petites cordes qui tiennent contre le ressort de la feuille. Il y a quelquefois plus de dix à douze de ces liens rangés à peu près sur une même ligne, lorsque le dernier tour d'un rouleau a à peu près la longueur, ou seulement la largeur entiere de la feuille. Toutes ou presque toutes les Chenilles savent filer; chaque lien est un paquet de fils de soye blanche, pressés les uns auprès des autres, mais qu'on juge pourtant tous séparés.

On imagine assez que ces petits cordages sont suffisans pour conserver à la feuille la forme de rouleau : mais il ne m'a pas paru aussi aisé d'imaginer comment la Chenille lui donnoit cette forme ; comment, & dans quel tems elle attachoit les liens. Tout cela m'a semblé dépendre de bien de petites manœuvres que j'ai eu très envie de savoir, & qu'on ne pouvoit apprendre qu'en les voyant pratiquer par l'Insecte même. Il n'y avoit gueres apparence d'y parvenir en observant les Chenilles sur les Chênes qu'elles habitent; le moment où elles travaillent n'est pas facile à saisir, & la présence d'un Spectateur ne les excite pas au travail. J'ai tenté un moyen qui m'a réussi mieux que je ne l'esperois. J'ai picqué dans un grand Vase, plein de terre hu-

* Fig. 1. & 2. ll, ll, &c.

humide, des branches de Chêne fraichement cassées; j'ai distribué sur leurs feuilles quantité de Chenilles que j'avois tirées des rouleaux qu'elles s'étoient déja faits. Par bonheur, elles souffrent impatiemment d'être à découvert; savent-elles qu'elles courent alors risque de devenir la pâture des Oiseaux? ou si elles sentent qu'elles ont besoin d'être à l'abri des impressions du grand air? Quoi qu'il en soit, elles se sont mises à travailler dans mon Cabinet & sous mes yeux, comme elles l'eussent fait en plein Bois.

Ordinairement, c'est le dessus de la feuille qu'elles roulent vers le dessous; mais les unes commencent le rouleau par le bout même de la feuille, & les autres par une des dentelures des côtés. Les rouleaux commencés de la premiere façon, se trouvent perpendiculaires à la principale nervûre, & ceux qui sont commencés de la seconde, lui sont ou paralleles ou inclinés. Quelque platte que paroisse une feuille, lors même que sa surface supérieure est concave, il est rare que le bord, ou quelque endroit du bord d'une de ses dentelures, ne soit point un peu recourbé en dessous; & quelque petite que soit l'étendue de la partie recourbée, & quelque petite que soit sa courbure, c'en est assez pour donner prise à la Chenille, pour la mettre en état de commencer à contourner la feuille, & de la contourner ensuite autant qu'il lui plaira. Des fils pareils à ceux qui maintiennent la feuille dans la figure de rouleau, servent à la lui faire prendre. Ce n'est qu'en la tirant successivement en differens endroits avec de

pe-

petites cordes, qu'elle vient à bout de la plier en une espece de spirale, qui a quelquefois cinq à six tours qui tournent autour du même centre.

Notre Insecte ayant donc choisi un endroit où le bord de la feuille est tant soit peu recourbé en dessous, elle s'y établit, & commence à travailler *. Alors sa tête se donne des mouvemens alternatifs très prompts; elle décrit alternativement des especes d'arcs en sens opposés, comme le font ceux des vibrations d'un Pendule. Le milieu de son corps, où quelque endroit plus proche de la queue, est l'espece de centre sur lequel la tête, & la partie du corps à qui elle tient, se meuvent. La tête va s'appliquer contre le dessous de la feuille, tout près du bord; & de là elle va s'appliquer le plus loin qu'elle peut aller, du côté de la principale nervûre †; elle retourne sur le champ d'où elle étoit partie la premiere fois, & revient de même ensuite retoucher une seconde fois l'endroit le plus éloigné du bord. Ainsi continue-t-elle à se donner de suite plus de deux à trois cens mouvemens alternatifs, c'est-à-dire, à filer autant de fils, car chaque mouvement de tête, chaque allée & chaque retour produit un fil, que la Chenille attache par chaque bout aux endroits où sa tête paroît s'appliquer. Chacun de ces fils est tendu depuis la partie recourbée de la feuille jusqu'à sa partie plane; il sert, ou doit servir, à tirer la premiere vers la seconde: tous ces fils ensemble doi-

* Fig. 4. † Fig. 5. & 6.

doivent faire une espece de lien. Ils ne partent pas tous d'un même point, les surfaces sur lesquelles ils sont appliqués, soit du côté du bord de la feuille, soit du côté opposé, approchent quelquefois de la circulaire, & ont plus d'une ligne de diametre *. La Chenille même n'en colle pas un grand nombre en dessous, près du bord de la feuille. Bientôt elle en colle quelques-uns contre le bord même, & ceux qu'elle file peu après, elle les attache à la surface supérieure, à la vérité à une petite distance du bord †. Ce premier paquet de fils donne déja une augmentation de courbure à la feuille vers le dessous. Une partie sensible paroît se replier; la partie même du bord, à laquelle le paquet de fils est attaché, est plus recourbée que celles qui la suivent, qui tendent à se redresser; mais bientôt une plus longue portion va se replier. Le premier lien ayant été assez fourni de fils, la Chenille va en commencer un autre à deux ou trois lignes de distance du précédent. Pour former celui-ci, elle fait une manœuvre précisément pareille à celle qu'elle a employée pour le premier. Il a aussi un effet pareil; la partie qui est entre le premier lien & le second, se recourbe plus qu'elle n'étoit, & ce qui est par-delà le nouveau lien commence à se recourber, & se recourbera davantage, lorsque la Chenille aura filé plus loin un troisieme lien pareil aux précédens.

L'étendue de la partie qui doit former le pre-

* Fig. 8. & 9. † Fig. 7.

premier tour du rouleau n'eſt pas grande : il en eſt ici comme d'un papier qu'on roule, en commençant à le rouler près d'un de ſes angles ; auſſi trois à quatre paquets de fils ſuffiſent pour donner la courbure à tout ce premier tour.

C'eſt encore au moyen de pareils fils, de pareils liens, que le ſecond tour doit être tortillé *. Il faut tirer vers le deſſous de la feuille une portion de ſa ſurface ſupérieure ſuffiſamment diſtante de celle qui a été roulée, c'eſt-à-dire, qu'il faut que chaque nouveau lien ſoit attaché par un bout à une partie de la feuille plus éloignée du bord, & que par l'autre bout il ſoit attaché plus près de la principale nervûre, ou de la queue de la feuille. En un mot, des paquets de fils arrangés au deſſus de ceux du premier tour, comme ceux du premier l'ont été, doivent produire un effet ſemblable ; comme les premiers ont fait faire à la feuille un premier ou à peu près un premier tour de ſpirale, de même les autres lui en feront faire un ſecond, ou à peu près, & ainſi de tours en tours.

L'effet néanmoins de ces paquets de fils, leur entier uſage, n'eſt pas encore aſſez clair, à beaucoup près : on voit bien, comme nous l'avons vu d'abord, qu'ils ſervent à tenir la feuille roulée ; mais quoique je viſſe la feuille ſe courber de plus en plus, à meſure qu'un nouveau lien ſe finiſſoit, j'avoue que je n'appercevois pas la cauſe du roulement. Le paquet n'eſt que l'aſſemblage de fils filés ſucces-

* Fig. 10.

cessivement. Dans l'instant que chaque fil vient de sortir de la filiere, pendant qu'il est mol encore, l'Insecte l'applique contre la feuille, il est assez gluant pour s'y coller. Il peut bien avoir été tiré droit d'une partie de la feuille à l'autre, mais il ne sauroit avoir été assez tendu pour faire un effort capable de ramener les deux parties de la feuille l'une contre l'autre. Je sai que ce fil, quoiqu'extrêmement délié, a quelque force; je l'ai vu en bien des circonstances suspendre la Chenille en l'air: mais il n'a pas été possible, que quand il a été attaché mol, qu'il ait été attaché avec le degré de tension nécessaire pour forcer une des parties d'une feuille à s'approcher de l'autre. Si après avoir été filé, il se raccourcissoit en séchant, ce raccourcissement le mettroit en état d'agir: mais où peut aller le raccourcissement d'un fil si court? combien donneroit-il peu de courbure à la feuille?

Une force plus puissante agit aussi contre elle; c'est une grande partie du poids de la Chenille: & ce n'a été qu'après avoir vu cet Insecte faire souvent de pareil ouvrage, que j'ai apperçu tout l'artifice de sa méchanique. Il dépend de la structure de chaque paquet de fils, de chaque lien. Nous l'avons consideré d'abord comme formé de fils à peu près paralleles; mais à présent, pour nous en faire une idée plus exacte, nous devons le regarder comme composé de deux plans de fils posés l'un au dessus de l'autre *. Tous les fils du

* Fig. 12.

du plan supérieur croisent ceux du plan inférieur. La manœuvre de l'Insecte m'en a convaincu; les fils eux-mêmes observés à la Loupe devoient me le faire voir; enfin un paquet consideré à la vue simple, suffisoit pour découvrir cette structure qui m'avoit échapé: il est plus large à l'une & à l'autre de ses extrémités, qu'il ne l'est au milieu; le nombre des fils du milieu est pourtant égal à celui des fils des bouts. Pourquoi y occupent-ils moins de place? c'est qu'ils y sont plus serrés les uns contre les autres, c'est qu'ils s'y croisent. Regardons donc chaque lien comme composé de deux plans de fils qui se croisent, suivons la Chenille pendant qu'elle file ceux de chacun de ces plans, & nous découvrirons le double usage de ces deux plans, de ces deux especes de toile. Les fils du premier plan étant tous attachés à peu près parallelement les uns aux autres, comme on le voit en *AB* *, la Chenille passe de l'autre côté pour filer ceux du second plan *CD* †. Pendant qu'elle file, elle ne peut aller de *C* en *D* sans passer sur les fils *AB*, & loin de chercher à les éviter en soutenant son corps & sa tête plus haut, on voit sa tête & une partie de son corps toujours appliqués sur le plan *AB*, elle ne l'abandonne point, elle le presse. Ces fils ensemble font une espece de toile, ou de chaine de toile, capable de soutenir cette pression; ils tirent par conséquent les deux parties de la feuille l'une vers l'autre. Celle qui est près du bord cede,

* Fig. 11. † Fi[illegible]

cede, se rapproche de l'autre; la feuille se courbe. Il n'est plus question que de lui conserver la courbure qu'elle vient de prendre, & c'est à quoi sert le nouveau fil que la Chenille attache. Ces fils, comme je l'ai déja fait remarquer, sont capables de soutenir un effort aussi considerable que celui que la feuille fait contre eux, puisqu'ils peuvent soutenir une Chenille en l'air. Il suit de ce que nous venons de dire, que les fils de la couche supérieure sont les seuls qui soient tendus, que ceux de la couche inférieure deviennent lâches; c'est aussi ce qu'on peut remarquer en observant le paquet avec attention.

La même méchanique, qui s'observe dans les deux differentes couches d'un même lien, doit se trouver & se voit bien plus aisément dans les liens des differens tours, comparés les uns aux autres. Quand la feuille ne fait encore qu'un tour de spirale, les liens qui retiennent ce tour sont tendus, au moins leur partie supérieure l'est. Mais quand la même feuille a, par son roulement, fait un second tour, ce ne sont plus que les derniers liens qui retiennent ce tour, qui sont tendus, tous ceux qui arrêtoient d'abord le tour précédent sont lâches, ils ne produisent plus aucun effet *. Si on appuye legerement sur ceux du second tour avec une plume, on voit que la feuille est tirée par cet effort; mais quoiqu'on appuye davantage sur ceux du premier tour, l'action ne passe pas jusqu'à la feuille: aussi la

* Fig. 16.

la vue seule apprend qu'ils sont comme flottans. Il n'y a donc que les liens du dernier tour, ou plutôt que la couche supérieure des fils du lien du dernier tour, qui conservent la courbure de la feuille.

Une Chenille qui s'est attaquée à une feuille de Chêne épaisse, dont les nervûres sont grosses, pourroit ne pas filer des fils assez forts pour tenir contre la roideur des principales nervûres, & sur-tout de celle du milieu. Mais elle sait les rendre souples ; elle ronge en trois à quatre endrois differens, ce que ces nervûres ont d'épaisseur de plus que le reste de la feuille; les endroits ainsi rongés n'ont qu'une petite étendue. Ils m'ont paru se trouver où la feuille doit être pliée pour recommencer à faire un nouveau tour.

Quand la Chenille, après avoir roulé une portion de la feuille, parvient à un endroit où il y a une dentelure qui déborde beaucoup par delà le reste, il arrive que les fils qu'elle attache au bout de cette dentelure, au lieu de la rouler, la plient, elle ne se courbe que vers le commencement du pli, le reste conserve une figure à peu près plane; de plus, si la Chenille donnoit à toute cette partie de la feuille une égale rondeur, comme elle l'a fait aux parties qu'elle a ci-devant roulées, & qui étoient d'une moindre étendue, le vuide du rouleau auroit là beaucoup plus de diametre qu'il n'en a ailleurs, il n'auroit plus les proportions commodes à l'Insecte. Après avoir observé de ces grandes dentelures de feuilles, qu'elles avoient presque pliées à plat, je les ai vu dans la suite

en

en former un Tuyau d'un auffi petit diametre que l'étoit celui des autres endroits, & un Tuyau très bien arrondi. Pour cela, la Chenille a befoin d'avoir recours à deux manœuvres differentes. 1°. Elle raccourcit la partie pliée, elle en retranche, pour ainfi dire, tout ce qu'elle a de trop d'étendue, elle en attache une portion à plat contre la feuille par un millier de fils. 2°. Ce qui refte libre eft trop applatti, c'eft à coups de tête qu'il m'a paru qu'elle l'arrondiffoit. J'ai vu des Chenilles renfermées dans ces endroits trop applattis, qui agitoient leur tête vivement & alternativement en des fens contraires. A chaque mouvement la tête frappoit contre les parois, c'étoient des efpeces de petits coups de marteau dont on entendoit le bruit.

Au refte, quand la Chenille a fini le premier tour du rouleau, elle travaille prefqu'à moitié à couvert; le bout replié ne touche jamais entierement la partie de la feuille fur laquelle il a été ramené: outre que fouvent il n'eft pas courbé autant qu'il le faudroit pour cela, c'eft que fes bords font dentelés, & laiffent des paffages au corps flexible de l'Infecte. La Chenille fe fert des mêmes paffages pour faire fortir la moitié de fon corps ou plus, lorfqu'elle file les liens qui attachent le milieu du troifieme ou du quatrieme tour. Pour les liens qui font plus près des bouts, les ouvertures des bouts lui donnent une plus libre fortie. Le bout de la queue refte dans l'intérieur du rouleau, pendant que

la tête va filer aussi loin qu'elle peut atteindre *, ce qui la mene assez près du milieu du rouleau.

Outre les liens qui sont tout du long du dernier tour du rouleau, l'Insecte a souvent besoin d'en mettre aux deux bouts, ou au moins à un des bouts; mais ils sont tellement disposés, qu'ils ne lui ôtent pas la liberté de sortir de l'intérieur de ce rouleau, & d'y rentrer. C'est-là son domicile, c'est une espece de cellule cylindrique, qui ne reçoit le jour que par les deux bouts; & ce qu'elle a de commode, c'est que ses murs fournissent la nourriture à l'Animal qui l'habite. Cette Chenille vit de feuilles de Chêne; étant à couvert, elle les ronge à son aise & en sureté. Elle commence par ronger le bout qui a été le premier contourné, & de suite elle mange tout ce qui a été tortillé, au dernier tour près. Aussi, de quatre à cinq tours que faisoit une feuille tortillée par delà le milieu, ou même entierement tortillée, souvent on ne retrouve plus que le dernier tour.

Quelquefois j'ai trouvé que le rouleau avoit été formé de deux feuilles roulées selon leur longueur; celle qui devoit occuper le centre, avoit alors été presqu'entierement rongée, il n'en restoit que les plus grosses fibres. J'en ai vu qui en faisant leur rouleau, ne laissoient pas de manger; elles dressoient en même tems les endroits qui se seroient malaisément pliés, elles les rongeoient.

Cet-

* Fig. 10.

Cette induſtrieuſe & laborieuſe Chenille eſt au plus de celles qui ſont d'une grandeur médiocre *. Elle eſt d'un gris ardoiſé; quelquefois elle paroît pourtant d'un brun verdâtre, mais je crois que c'eſt quand elle eſt bien ſoulée de feuilles. Peut-être auſſi que ſa couleur paroît differente après des changemens de peau, car elle en change probablement pluſieurs fois, les dépouilles qu'on trouve dans les rouleaux le prouvent. Elle eſt d'une extrême vivacité; pour peu qu'on la touche, on la voit ſe remuer en differens ſens avec une grande vîteſſe.

Un des bouts du rouleau eſt l'ouverture par où elle jette ſes excrémens, qui ſont de petits grains noirs & à peu près ronds.

Une partie d'une feuille, ou même une feuille de Chêne entiere, ne ſeroit pas une proviſion ſuffiſante pour la nourriture de notre Chenille pendant toute ſa vie; elles ſe font de nouveaux rouleaux quand elles en ont beſoin. Après y avoir vêcu en Chenilles, elles s'y métamorphoſent en Chryſalides, & enſuite en Papillons. Le dernier rouleau qu'elles ſe font, differe un peu des autres, les tours en ſont moins ſerrés, l'Inſecte eſt devenu plus gros. Chaque tour de ce dernier rouleau n'eſt pas attaché par ces forts liens diſtribués d'eſpaces en eſpaces; des fils un peu écartés les uns des autres, mais qui regnent depuis un bout juſqu'à l'autre, le retiennent †; c'eſt une eſpece de toile legere dont la force n'eſt pas équivalente à celle des corda-

* Fig. 17. † Fig. 18.

dages employés ci-devant. Il ſemble que l'Inſecte ſache proportionner la force qu'il employe, à la réſiſtance qu'il a à vaincre; plus le diametre des tours eſt petit, & plus le reſſort de la feuille agit pour la redreſſer, auſſi eſt-ce ſur-tout le dernier tour qui n'eſt tenu que par la toile dont nous parlons. Dans la fabrique de cette eſpece de toile, on obſerve la même méchanique que nous avons remarquée dans celle des liens; elle eſt de même compoſée de deux plans de fils qui ſe croiſent très viſiblement; ceux de deſſous ſervent à tirer la feuille, à la courber, pendant que l'Inſecte s'appuye deſſus, & qu'il file ceux du plan ſupérieur qui doivent la fixer dans cette courbure.

C'eſt dans ces mêmes Etuis, où nos Chenilles ont vêcu & cru, qu'elles ſe transforment en Chryſalides *. La peau des Chryſalides eſt molle & tendre dans les premiers momens de la transformation, quoique par la ſuite elle devienne ſéche & dure; l'attouchement de la feuille ſeroit trop rude pour cette peau, lorſqu'elle ne vient que d'être dégagée de deſſous l'enveloppe de Chenille. Il ſemble que l'Inſecte ait prévu qu'il avoit à craindre cette incommodité, car lorſque le tems de cette premiere métamorphoſe approche, il tapiſſe l'intérieur du rouleau d'une legere couche de fils de ſoye, dont l'attouchement eſt plus doux que celui de la ſurface raboteuſe de la feuille.

Enfin, à l'état de Chryſalide doit ſucceder ce-

* Fig. 19. & 20.

celui de Papillon *. La condition de cette Chenille, comme celle de toutes les Chenilles que nous connoiſſons, eſt de vivre ſucceſſivement ſous ces trois formes differentes. Je ne ſais point aſſez préciſément combien elle conſerve celle de Chryſalide, mais il ne m'a pas paru que ce fût plus de trois ſemaines. Quand elle eſt prête de la quitter, elle avance vers un des bouts du rouleau, juſqu'à en ſortir près d'à moitié ou plus †; là, plus exposé à l'air, le fourreau de Chryſalide acheve de ſe ſecher, & les efforts que fait le Papillon qu'il renferme, le briſent plus aiſément. Le Papillon s'en échape, & n'a plus beſoin, pour prendre l'eſſor, que de laiſſer évaporer pendant quelques inſtans l'humidité de ſes ailes. Si on examine dans le mois de Juillet les rouleaux de nos feuilles de Chêne, il y en aura peu à qui on ne trouve un fourreau de Chryſalide qui eſt reſté à un des bouts, & cela parce que les Papillons en ſont ſortis depuis le mois de Juin.

La couleur de ces Papillons eſt compoſée de differentes nuances de brun jaunâtre, les unes plus foncées, les autres plus claires, mêlées par des eſpeces de taches qui font un agréable effet ‡. Les mêmes Chenilles en donnent de deux groſſeurs differentes. Les plus petits, ſelon l'analogie ordinaire, devroient être les mâles: j'en ai pourtant vu d'accouplés qui ne differoient pas conſiderablement en groſſeur. Pendant leur accouplement,

* Fig. 21. & 22. † Fig. 18. r.
‡ Fig. 21. & 22.

ment, ils sont placés derriere contre derriere, à la maniere des Hannetons.

Au reste, l'espece de Chenille grise, ou d'un gris verdâtre, dont nous avons parlé jusqu'ici, n'est pas la seule qui roule des feuilles de Plantes & d'Arbres, ni même la seule qui roule des feuilles de Chêne. J'ai observé d'autres especes, soit beaucoup plus grosses, soit plus petites, qui roulent aussi les feuilles de ce dernier Arbre, & entre celles-ci j'en ai observé d'entierement vertes, de verdâtres, & de diverses autres couleurs. Il y en a une qui roule fort artistement les feuilles d'Orme, qui ne differe guere ni par sa grandeur, ni par sa couleur, de notre habile rouleuse. Mais comme toutes ces diverses especes n'ont point d'artifices differens de celui que nous avons suivi jusqu'ici, que leurs rouleaux ne sont pas toujours aussi bien faits que ceux que nous avons décrits, elles n'ont rien qui doive nous arrêter. En général, presque toutes les rouleuses sont d'une très grande vivacité.

Il nous reste à parler des Chenilles qui, au-lieu de rouler les feuilles, se contentent de les plier. Le nombre de ces plieuses est encore plus grand que celui des rouleuses : leurs ouvrages sont plus simples; mais il y en a qui malgré leur simplicité ne laissent pas de paroître industrieux. Le Chêne nous fournit encore de ceux-ci; on voit de ses feuilles dont le bout a été ramené vers le dessous *; il y a été appliqué & assujetti presque

* Fig. 23.

que à plat, il ne reste d'élévation sensible qu'à l'endroit du pli. J'ai observé de ces feuilles, où tout le contour de la partie pliée étoit logé dans une espece de rainure que la Chenille avoit creusée dans plus de la moitié de l'épaisseur de la feuille. Sur d'autres feuilles du même Arbre, on voit que de leurs grandes dentelures ont été de même pliées en dessous. La plupart des autres Arbres nous offrent aussi des feuilles pliées par les Chenilles. Mais il n'y en a point où on puisse en observer plus commodément que sur les Pommiers, ils en ont de toutes especes à nous faire voir; de seulement pliées en partie, je veux dire de simplement courbées *; de pliées entierement, je veux dire, où la partie pliée a été ramenée à plat sur une autre partie de la feuille; de courbées, de pliées vers le dessus, & de courbées ou pliées vers le dessous. Entre ces dernieres, le Pommier même en a qui ont une singularité, que je n'ai observée sur aucunes de celles des autres Arbres. Tout autour du bord de la dentelure de la partie repliée, il y a un bourlet comme cotonneux, qui est pourtant de soye d'un jaune pâle †; il s'éleve d'environ une ligne au dessus de la partie qu'il entoure; il la borde comme feroit un cordonnet; il a plus d'épaisseur que de largeur.

Au-lieu que les Chenilles rouleuses habitent des rouleaux, les plieuses se tiennent dans une espece de Boîte plate; elles n'y ont pas un grand espace, mais il est proportonné à

* Fig. 24. † Fig. 27.

à la grandeur & à la grosseur de leur corps; ordinairement elles sont des plus petites. Chacune est bien close dans cette espece d'étui plat, ou de boîte; il reste pourtant quelquefois une ouverture à chaque bout, mais à peine ces ouvertures sont-elles sensibles *. Elles se renferment aussi pour se nourrir à couvert; mais si elles rongeoient, comme font les rouleuses, l'épaisseur entiere de la feuille, leurs especes de boîtes seroient bientôt tout à jour, au-lieu que tant qu'elles y demeurent, jamais on n'y voit de trous. Leur goût, & peut-être leur prévoyance, les porte à ne manger qu'une partie de l'épaisseur de la feuille. Celles qui plient les feuilles en dessous, épargnent la membrane qui en fait le dessus. Les unes & les autres n'attaquent point les nervûres & les fibres un peu grosses. Elles savent ne détacher que la substance la plus molle, la pulpe, le parenchime qui est renfermé dans le rézeau fait par l'entrelassement des fibres. Aussi la structure de ce rézeau est-elle bien plus sensible dans les endroits où elles ont rongé, que dans les autres.

Celles qui habitent des feuilles bien pliées, commencent à ronger la substance de la feuille à un des bouts de l'étui, & la partie qui a été rongée la premiere, est celle sur laquelle elles déposent leurs excrémens. Elles continuent à ronger, en avançant vers l'autre bout, mais elles ont la propreté d'aller jetter leurs excrémens dans l'endroit où sont les premiers; ainsi

* Fig. 27. B D.

ainſi ils ſe trouvent accumulés à un coin, & jamais il n'y en a d'épars. C'eſt au moins ce qu'obſervent régulierement les Chenilles de nos Pommiers, dont les étuis ſont environnés d'un bourlet ou cordon ſoyeux. On voit avec plaiſir manger celles qui ſe contentent de courber des feuilles, ſur-tout ſi on les conſidere à la Loupe. On remarque avec quelle adreſſe & avec quelle vîteſſe elles découpent partie de l'épaiſſeur de la feuille. Leur tête eſt un peu inclinée vers un côté, afin apparemment qu'une ſeule de leurs dents perce d'abord une petite portion de la ſubſtance de la feuille, que les deux dents, ſerrées l'une contre l'autre dans le moment ſuivant, ſavent détacher. Les coups de dents ſe ſuccedent avec une vîteſſe prodigieuſe, & à meſure qu'ils ſont réiterés, le rézeau, formé par les fibres, ſe découvre, devient net, dans les endroits où auparavant il étoit à peine ſenſible. Ce n'eſt que par de petites aires que la ſubſtance de la feuille eſt emportée.

Ces Chenilles, qui ſe contentent de courber les feuilles, ſont celles auſſi qui ſont les plus aiſées à obſerver dans leur travail, il eſt le plus ſimple de ceux de ce genre; il ſuffira pourtant de l'avoir détaillé, pour avoir donné une idée de tous les autres. Une petite Chenille d'un verd clair, dont chaque anneau eſt chargé de pluſieurs petits grains noirs, eſt ſur toutes commode à ſuivre, elle aime à ronger le deſſus de la feuille, & par conſéquent elle doit plier la feuille, ou ramener la dentelure de quelque endroit de ſes bords, vers le deſſus; elle ſe contente de faire décrire un

arc tantôt plus, tantôt moins courbe, à la partie qu'elle contourne *, mais jamais elle ne la contourne au point de ramener ses bords à toucher le dessus de la feuille. Elle ne craint point la présence du Spectateur, elle plie la feuille sur sa main, s'il tient sa main en repos. Une de ces Chenilles étant posée sur le dessus d'une feuille platte de Pommier, n'est donc pas longtems sans travailler à donner à une portion de cette feuille la courbure qu'elle lui veut. Entre les differens endroits des bords de la feuille, il y en a toujours qui s'élevent plus que les autres. C'est à un de ceux-là qu'elle s'adresse; elle s'en approche à une distance convenable, & se fixant sur sa queue & sur les anneaux qui en sont proche, elle porte sa tête sur le bord de la feuille, & de-là la ramene sur le plat de la feuille, du côté de la principale nervûre †; elle file de suite plusieurs fils paralleles les uns aux autres, qui font le commencement d'une piece de toile qu'elle va étendre.

Nous avons consideré la feuille comme à peu près platte, mais seulement comme à peu près platte; ainsi les fils qui viennent d'être filés ne sont appliqués contre cette feuille que par leurs bouts, le reste de leur longueur est en l'air. La Chenille monte sur ces fils qui, chargés de son poids, forcent le bord de la feuille à avancer vers la principale nervûre. Les nouveaux fils, que la Chenille file en cette position, maintiennent le bord de la feuille dans le commencement de la cour-

* Fig. 24. † Fig. 25.

courbure qu'elle a prise; en étendant ensuite cette toile, & marchant dessus à mesure qu'elle l'étend, la Chenille force toujours de plus en plus la feuille à se plier. Cette méchanique est bien simple, & ne mériteroit pas de nous arrêter, après avoir vu pratiquer l'équivalent par nos rouleuses; mais le supplément qu'il faut y ajouter ne doit pas être passé sous silence. Les fils qui composent la toile, n'ont qu'une longueur proportionnée aux arcs que la tête de la Chenille peut décrire, étant fixée sur une portion de son corps. Si au moyen de cordes si courtes, & dirigées comme elles le sont, la Chenille forçoit la feuille à se courber entierement, la feuille ainsi courbée décriroit une circonference d'un très petit rayon, telles que sont celles des premiers tours de certains rouleaux. Or la courbure qu'elle veut, & qu'elle a besoin de donner à cette partie de la feuille, doit être celle d'un cercle, ou d'une autre courbe d'un plus grand rayon. Pour parvenir à la lui donner, elle ne continue pas à la tirer par des cordes si courtes, ou dont les directions soient si inclinées. Après avoir filé une certaine étendue de toile, elle cesse de suivre la même ligne, elle vient se placer plus près de la grosse nervûre *, & là elle commence à filer une toile composée de fils; elle colle un des bouts de chacun des nouveaux fils à la toile précédente, & l'autre le plus près qu'elle peut aller de la principale nervûre, ou même par delà. Ce qui fait le même effet que

* Fig. 26.

que si elle eût augmenté près d'une fois la longueur des premieres cordes. Elle monte alors sur ce nouveau plan, & se place vers l'endroit où les deux pieces de toiles ont été réunies. Là placée, elle attache des fils au bord de la feuille, & vers la principale nervûre, elle forme une nouvelle toile; à cette nouvelle toile, elle attache bientôt les fils d'une autre, qui croisent ceux de la précédente, & ainsi de suite elle continue à faire courber la feuille, mais doucement, & sans que sa courbure soit considerable. Des plans de toile s'élevent ainsi successivement les uns au dessus des autres, & quand la Chenille a avancé son ouvrage, elle paroît, par rapport à la surface de la feuille, comme sur un échaffaud.

Elle ne se tient pourtant pas toujours sur ces plans de toile; de tems en tems elle en descend, & vient sur la surface de la feuille; quelquefois c'est pour s'y reposer en mangeant; quelquefois on l'y voit la tête levée, agiter avec vîtesse ses premieres jambes; elles lui servent alors de mains pour briser les toiles des plans inférieurs, qui ne peuvent plus que l'incommoder, lorsqu'elle veut marcher sur la feuille, & qui peuvent même s'opposer à l'effet qu'elle a à faire produire aux toiles des plans supérieurs.

Celles-ci, comme je l'ai assez dit, se contentent de courber une portion de la feuille; mais celles qui achevent de la plier, ne commencent pas leur ouvrage autrement; elles commencent par faire prendre de la courbure à la partie qui doit être ramenée à plat, & quand

quand elle en a pris suffisamment, la Chenille passe sous le plan de toile qui la tient courbée, & au dessous de ce plan elle en file d'autres, successivement, qui sont tous de plus proches en plus proches du pli de la partie recourbée. L'effet de ceux-ci dépend de leur position. N'en considerons qu'un, celui qui suit immédiatement l'extérieur. D'un côté les bouts de ses fils ne sont pas attachés à la dentelure, ils le sont un peu au-dessous, & par l'autre bout ils sont attachés à partie de la feuille correspondante. D'où il est clair que quand la Chenille charge ce plan de fils, cette toile, qu'elle approche l'une de l'autre les deux parties de la feuille, qu'elle les approchera encore davantage, & qu'elle les conduira à s'appliquer l'une contre l'autre, en filant une seconde, une troisieme couche de fils, s'il en est besoin, dont les bouts des fils se trouvent toujours attachés plus près de l'endroit où doit être le pli.

Les couches de fils, les toiles qui précédent la derniere filée, ne produisent presque plus d'effet *. Les fils des premieres se trouvent en dehors de la dentelure, & la Chenille y pousse ceux des toiles qui la suivent. De-là il arrive que ces fils lâches, entrelassés, & poussés par delà le bord de la partie pliée, forment une espece de bourlet, qui semble avoir été fait avec plus d'artifice qu'il ne l'a été †.

Au reste, quelle que soit la position de la feuille, la Chenille fait toujours le même usa-

* Fig. 28. † Fig. 27.

usage dû poids de son corps pour la courber ou plier. Si une feuille est posée horizontalement, & que la Chenille la courbe en dessus, alors le plan des fils est plus élevé que la surface de la feuille, & la Chenille va se mettre sur le dessus de cette toile. Mais si la Chenille roule la feuille en dessous, le plan de chaque toile est plus bas que celui de la feuille, & la Chenille charge cette toile, tantôt en se posant sur la surface intérieure, & elle est alors dans une situation naturelle, tantôt en se mettant à la renverse sur la surface extérieure, & tenant ses jambes cramponnées entre les fils de la toile. Il y en a même qui ne travaillent à plier les feuilles de Chêne, qu'en se tenant cramponnées de la sorte.

Des circonstances déterminent quelquefois des Chenilles, qui plient ordinairement des feuilles en dessous, à les plier en dessus, elles profitent des dispositions qu'a la feuille à se contourner plus d'un côté que de l'autre; c'est ce que m'ont fait voir celles que j'ai fait travailler chez moi. Ainsi il ne leur est pas absolument essentiel de ronger la feuille par une de ses surfaces, plutôt que par l'autre. Il y a des feuilles de Chêne qui sont pliées par le moyen de paquets, de liens de fils, pareils à ceux qu'employent les rouleuses; mais on trouve assez ordinairement dans l'intérieur du pli, des toiles, qui ont apparemment servi à achever d'approcher les deux parties l'une de l'autre.

Toutes ces Chenilles se métamorphosent en Papillons, mais la plupart très petits, ce

qui

qui m'a fait négliger de les faire graver.

Diverses especes d'Araignées courbent aussi des feuilles, d'autres les plient, & d'autres les assemblent en paquet. Ce que nous avons vu pratiquer aux Chenilles, met assez au fait des differentes manieres dont s'y peuvent prendre les Araignées, qui sont de maitresses fileuses. Au reste, si les Araignées plient des feuilles, c'est pour s'y renfermer avec leurs œufs, qu'elles déposent sur ces mêmes feuilles, & qu'elles y envelopent de soye. Là elles se placent sur le paquet d'œufs, sur lequel elles restent constamment, comme s'il avoit besoin d'être couvé.

EXPLICATION DES FIGURES.

LA *Figure* 1. représente une feuille, dont le bout a été roulé vers le dessous. La face *A A*, qui paroît ici, est celle de dessous. *BC* le rouleau, dont la partie qui paroît est une portion du dessus de la feuille. *lo*, *lo*, *lo*, marquent quelques-uns des liens de soye qui tiennent cette feuille roulée.

La *Figure* 2. est celle d'une feuille roulée parallelement, ou à peu près, à sa principale nervure *N*. La face *A N* est le dessous de la feuille. *B C* le rouleau. *lo*, *lo*, *lo*, quelques-uns des liens de soye qui conservent ce rouleau dans sa forme. Ici il n'y a à peu près que la moitié de la feuille roulée.

La *Figure* 3. est celle d'une feuille roulée en entier, parallelement à sa principale nervure. *ll*, *ll*, les liens du rouleau.

La *Figure* 4. fait voir une Chenille, qui pro-

profitant de la petite courbure que la feuille a en *A*, va travailler à la rouler parallelement à sa principale nervure.

La *Figure* 5. & la *Figure* 6. représentent des Chenilles en differentes attitudes, qui n'ont encore collé leurs fils que sur le plat de la feuille, & au-dessous de la partie courbée, ou à son bord.

La *Figure* 7. représente une Chenille qui colle un fil en dessus de la feuille, en dessus de la partie repliée.

La *Figure* 8. est celle d'une feuille qu'une Chenille a commencé a rouler par le bout. Elle a déja attaché les liens *lo*, *lo*, & file actuellement le lien *l K*.

Dans la *Figure* 9. la Chenille a filé trois liens *lo*, *lo*, *lo*, & va en commencer un quatrieme.

La *Figure* 10. montre un rouleau, dont le premier tour est fini, & dont le second est commencé. Les liens *MN* de ce tour sont au-dessus des liens *lo* du tour précédent.

La *Figure* 11. est celle d'une feuille, dont le second tour est roulé sur une plus grande longueur que dans la Fig. 10.

La *Figure* 12. représente deux plans de lignes *AB*, *CD*, qui se croisent en *E*: elle donne en grand une image de la structure de chaque lien *lo* des autres Figures. Les lignes de chacun de ces plans doivent être regardées comme autant de fils.

Dans la *Figure* 13. une Chenille est représentée filant le premier plan *AB* des fils, dont un paquet ou lien est composé.

Dans les *Figures* 14 & 15. la Chenille a chan-

changé de côté, & file le second plan supérieur des fils du lien *CD*. Dans la Fig. 14, elle colle le bout d'un nouveau fil en *C*, & dans la Fig. 15, elle colle l'autre bout du même fil en *D*; & pendant qu'elle l'y colle, le poids de son corps charge le premier plan.

La *Figure* 16. est la coupe d'un rouleau, qui fait environ deux tours; on y voit les fils des liens *lo* lâches & flottans, pendant que les fils supérieurs du lien *NM* du second tour sont seuls tendus.

La *Figure* 17. représente notre Chenille rouleuse dans la grandeur naturelle. On l'a dans d'autres attitudes, dans plusieurs des Figures précédentes.

La *Figure* 18. est celle d'une feuille que la Chenille a roulée lorsqu'elle étoit prête de se métamorphoser. Les fils qui maintiennent le dernier tour de ce rouleau depuis *p* jusqu'en *q*, ne sont pas disposés par paquets, ils forment une espece de toile. En *r* est la coque de la Chrysalide, d'où l'Insecte est sorti sous la forme de Papillon.

La *Figure* 19. représente une Chrysalide de cette Chenille, vue par dessous en *A*, & par dessus en *B*.

La *Figure* 20. est la Chrysalide *A* dessinée plus grande que nature.

Les *Figures* 21 & 22. sont celles de deux des Papillons dans lesquels nos Chenilles se transforment. Celui de la Figure 21 est plus petit que celui de la Fig. 22.

La *Figure* 23. est celle d'une feuille de Chêne, dont le bout *bcb* a été plié en dessous.

La *Figure* 24, représente une de ces feuil-

les de Pommiers que les Chenilles ſe contentent de courber.

La *Figure* 25. fait voir une Chenille qui commence à attacher des feuilles de Pommier pour la courber: elle a déja fait une eſpece de toile compoſée de fils paralleles.

Dans la *Figure* 26. la Chenille a filé une ſeconde portion de toile: un des bouts de chacun des fils de celle-ci eſt attaché ſur la toile précédente. Les fils de la derniere croiſent les fils de la premiere, leur direction eſt oblique à celle des autres. Entre *f*, *f*, on voit que les fils de la ſeconde toile ſont attachés à ceux de la premiere.

La *Figure* 27. eſt celle d'une feuille de Pommier pliée vers le deſſous. *B C D* eſt un bourlet ou cordon ſoyeux, qui entoure la dentelure de la partie pliée.

La *Figure* 28. fait voir la feuille précédente, dans un tems où elle n'étoit pas entierement pliée. En *efg* paroiſſent les toiles, qui plus preſſées les unes contre les autres, font le bourlet ſoyeux, lorſque la portion de la feuille eſt entierement pliée.

Fig. 1.

C

l l l

o o o

A

C

l

l

Fig. 2.

l

o

B

N

Fig. 4.



Fig. 5.

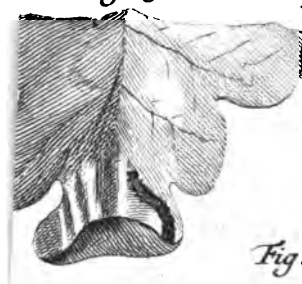


Fig. 6.



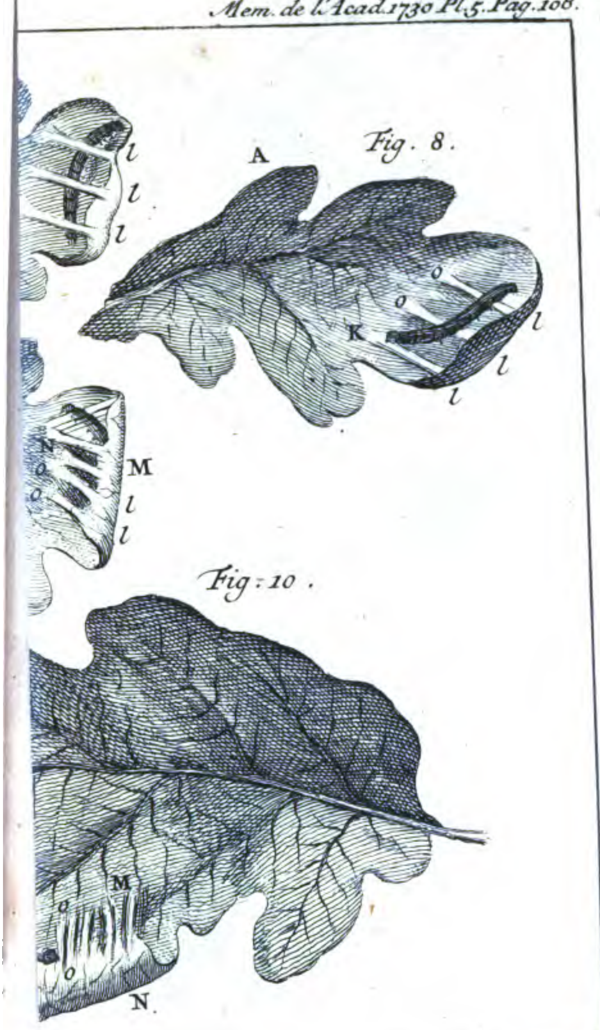

Fig. 8.
A
l
l
l
o
o
K
l
l
l
N
o
o
M
l
l
Fig: 10.
M
o
o
N.


Fig. 9.
Fig. 10.

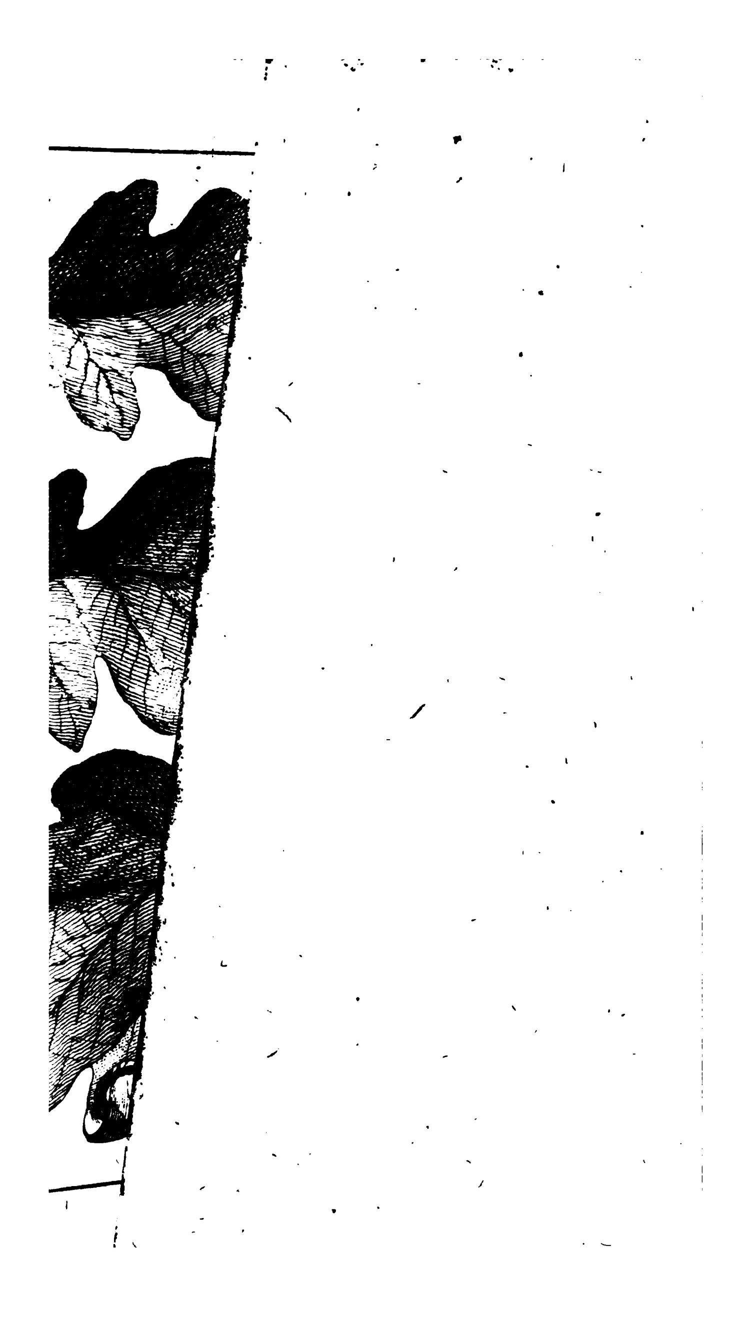


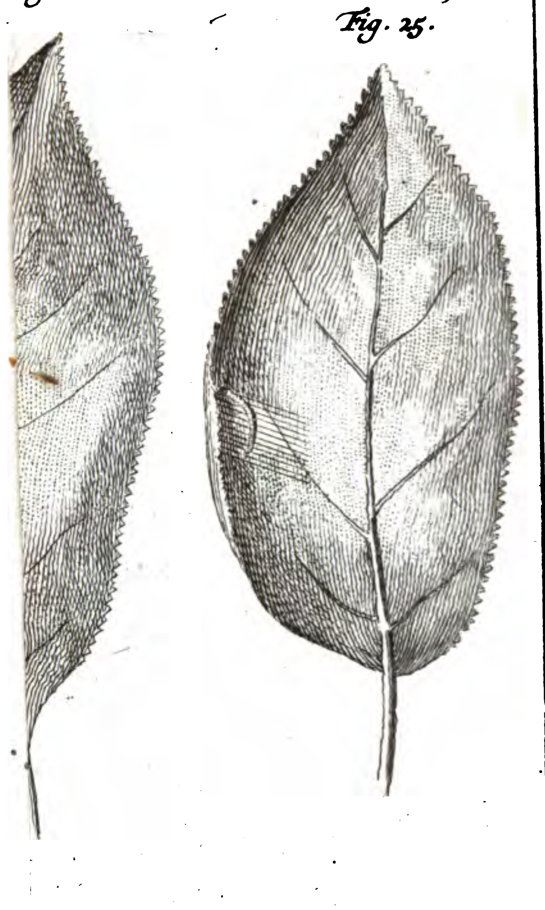

Fig. 13.
A
B
Fig. 11.
Fig. 16.
o
o
M
l
l
N

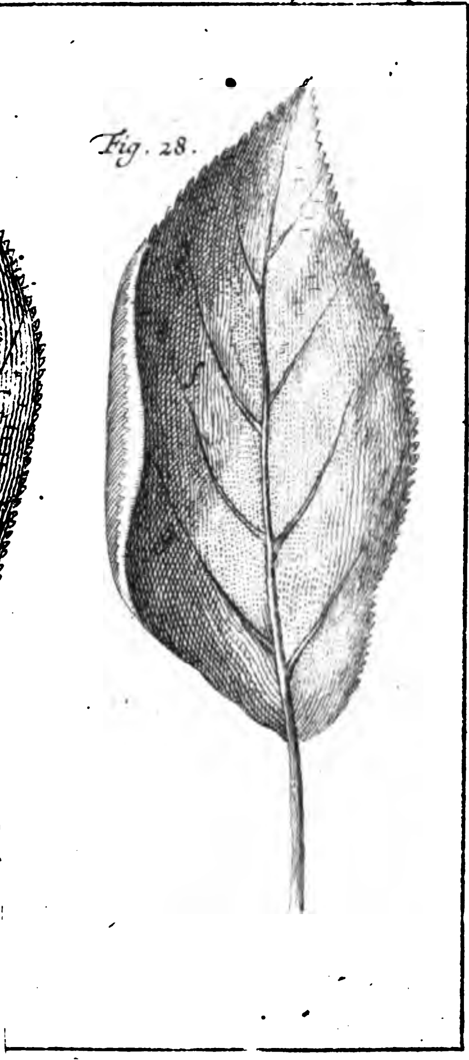

.20.
r
Fig. 18.
p
q
Fig. 17.
Fig. 17.



Fig. 24.




Fig. 26.
Fig. 25.


Fig. 28.

METHODE

Pour trouver les Tautochrones, dans des Milieux résistans, comme le Quarré des Vîtesses.

Par M. BERNOULLI, Professeur de Mathématiques à Bâle.

AVANT que d'entreprendre la Solution générale, voici quelques considerations nécessaires sur les fonctions semblables composées d'indéterminées proportionnelles.

DEFINITION I. Si l'on forme une fonction quelconque d'une quantité déterminée a, & d'une indéterminée x, de maniere que a & x fassent ensemble le même nombre de dimensions dans chaque terme; prenant ensuite une autre déterminée A, & une indéterminée X, proportionnelles aux premieres a & x, c'est-à-dire, telles que $a . A :: x . X$, si l'on forme de A & X une nouvelle fonction, pareille à celle qu'on a formée de a & x, j'appelle ces deux fonctions, & les autres de cette espece, *fonctions semblables*. Ainsi par exemple, $a^3 + faax + gaxx + bx^3$ & $A^3 + fAAX + gAXX + bX^3$ sont des fonctions semblables; de même $\sqrt{(a^4 + fx^4)}$ & $\sqrt{(A^4 + fX^4)}$; $\frac{aa + fax + gxx}{ba^3 + ix^3}$ & $\frac{AA + fAX + gXX}{bA^3 + iX^3}$; $a + \sqrt{(ax + fxx)}$ & $A + \sqrt{(AX + fXX)}$; $\frac{a + x}{axx + f\sqrt{(a^6 + x^6)}}$ & $\frac{A + X}{AXX + f\sqrt{(A^6 + X^6)}}$;

&

& ainsi des autres, prenant toujours f, g, h, i, &c. pour des coëfficiens numériques.

DEFINITION II. J'appelle aussi *fonctions semblables transcendantes*, celles des précédentes qui seroient multipliées par dx & dX, & qui seroient supposées intégrées par le signe $\int$. Ainsi par exemple, $\int \frac{adx}{\sqrt{(aa - xx)}}$ & $\int \frac{AdX}{\sqrt{(AA - XX)}}$ sont des fonctions semblables transcendantes, & ainsi des autres.

DEFINITION III. Les fonctions semblables, soit algébriques soit transcendantes, sont estimées être d'une telle ou telle dimension, dont l'exposant est le nombre qui reste, quand on retranche l'exposant des termes du dénominateur, de l'exposant des termes du numérateur, en comptant dx ou dX pour une dimension; & s'il y a des signes radicaux, en divisant d'abord l'exposant des termes par l'exposant du signe. Ainsi $\sqrt{(a^4 + x^4)}$ est réputé de deux dimensions; $\frac{a + x}{axx + f\sqrt{(a^6 + x^6)}}$ aura pour dimension $1 - 3 = -2$; $\int \frac{adx}{\sqrt{(aa - xx)}}$ est d'une dimension, parce que adx est de deux dimensions, & $\sqrt{(aa - xx)}$ d'une; ainsi cette fonction $\int \frac{adx}{\sqrt{(aa - xx)}}$ a pour exposant $2 - 1 = 1$, de même $\frac{a^3 + faxx}{gaxx + hx^3}$ & $\int \frac{axdx}{fa^3 + gx^3}$ n'ont aucune dimension, parce que $3 - 3 = 0$.

THEO-

THEOREME.

Toutes les fonctions semblables, transcendantes, soit algébriques, sont entre elles comme leurs quantités semblables a & A, *ou* x & X, *élevées au même exposant que ces fonctions. Ainsi par ex.*

$$aa . AA :: (xx . XX ::) \frac{a^3 + faxx}{gx} . \frac{A^3 + fAXX}{gX}$$

$$:: \int dx \sqrt{(aa+xx)} . \int dX \sqrt{(AA+XX)}$$

$$:: \int \frac{x^3 dx}{aa+ax} . \int \frac{X^3 dX}{AA+AX}$$; *de même* $\frac{1}{a} . \frac{1}{A}$

$$:: (\frac{1}{x} . \frac{1}{X} ::) \frac{1}{\sqrt{(aa-xx)}} . \frac{1}{\sqrt{(AA-XX)}}$$

$$:: \int \frac{adx}{\sqrt{(a^6-x^6)}} . \int \frac{AdX}{\sqrt{(A^6-X^6)}} :: \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(a^6+x^6)}}$$

$$. \int \frac{dX}{\sqrt[3]{(A^6+X^6)}}$$, *& ainsi des autres.*

COROLL. L'on voit par-là que toutes les fonctions semblables, qui n'ont aucune dimension, sont égales entre elles : car elles sont comme a^0 à A^0, ou comme x^0 à X^0. Mais $a^0 = 1 = A^0$, ou $x^0 = 1 = X^0$. Ainsi par exemple $\int \frac{adx}{\sqrt{(a^4-x^4)}} = \int \frac{AdX}{\sqrt{(A^4-X^4)}}$; $\int \frac{aadx+xxdx}{a^3+fx^3}$

$$= \int \frac{AAdX+XXdX}{A^3+fX^3} ; \frac{a+\sqrt{(aa-xx)}}{f\sqrt[3]{(axx)}}$$

$$= \frac{A+\sqrt{(AA-XX)}}{f\sqrt[3]{(AXX)}} ; \frac{a+fx}{a-gx} + \frac{aa+bax}{aa-gxx}$$

$$= \frac{A+fX}{A-gX} + \frac{AA+bAX}{AA-gXX}$$, & ainsi des autres.

SCHOLIE. J'ai déja traité ce même sujet autrefois, dans un Mémoire que donna feu mon Fils Nicolas, inseré dans le VIIe. Tome des Suppl. des Act. de Leipf. pag. 322. La démonstration se présente d'elle-même, pour peu qu'on y fasse attention, & est plus facile à concevoir qu'à expliquer. Cette consideration est le seul moyen de se bien conduire dans la recherche des Tautochrones, & des autres Courbes où l'on est obligé de considerer les fonctions semblables, comme l'on verra dans la suite.

PROBLEME I, ET PRINCIPAL.

Décrire la Courbe par laquelle un corps descendant par sa pesanteur dans un milieu d'une densité uniforme, de quelque point de la Courbe qu'il commence à descendre, parvienne toujours dans un tems égal au point le plus bas; & de là remonte dans le même tems par l'autre branche de la Courbe jusqu'où il pourra remonter, en supposant la résistance comme le quarré des vitesses.

§. I. SOLUT. J'appelle l'Arc total *descendu*, celui qui est compris entre le point le plus élevé d'où le corps commence à descendre, & le point le plus bas; l'Arc total *remonté*, celui qui est compris entre le point le plus bas que je prends pour le *sommet* de la Courbe, & le point jusqu'où il peut remonter avec sa vîtesse acquise, jusqu'à ce qu'il ait perdu toute sa vîtesse; l'Arc *partial*, soit descendu, soit remonté, est une partie quelconque indéterminée d'un Arc total quelconque, prise depuis le sommet jusqu'au lieu de la Cour-

be

be où se trouve le corps, soit en descendant, soit en montant.

II. Soit maintenant la gravité qui anime les corps $=g$, la vîtesse dans un point quelconque de l'Arc total $= v$, l'Arc partial $=r$ (je l'appelle plutôt r que s, parce que la lettre s se confondroit facilement avec le nombre 5) l'Abscisse prise sur l'Axe élevé verticalement depuis le sommet de la Courbe, correspondante à l'Arc partial, $= x$, l'Appliquée correspondante au même Arc, $=y$, la résistance qu'on suppose proportionnelle au quarré de la vîtesse, $= \frac{vv}{n}$, où j'entends par $\frac{1}{n}$, l'intensité de cette résistance, n étant constant pour un arc total quelconque.

III. Par la décomposition de la force de la pesanteur en tangentielle & normale, l'on a la force tangentielle $= \frac{gdx}{dr}$; de laquelle ôtant, lorsque le corps descend, ou à laquelle ajoutant, lorsque le corps remonte, la force de la résistance $\frac{vv}{n}$, l'on a pour la force accélératrice ou retardatrice $\left(\frac{gdx}{dr} \mp \frac{vv}{n}\right)$ *Not. B.* (le signe supérieur ayant lieu lorsque le corps descend, & l'inférieur lorsqu'il remonte, ce qu'il faudra aussi toujours observer dans la suite) l'on aura donc $\left(\frac{gdx}{dr} \mp \frac{vv}{n}\right)$

$\times \frac{dr}{v} = - dv$; d'où l'on tire cette Equation $g\,dx \mp \frac{vv\,dr}{n} = - v\,dv$ à laquelle il faut satisfaire. En faisant $dr = \frac{dz}{z}$, il vient $ngz\,dx \mp vv\,dz = - nzv\,dv$, ou $-2\,gz\,dx = \mp \frac{2}{n}\,vv\,dz + 2\,zv\,dv$; divisant par $z^{\mp\frac{2}{n}+1}$, l'on aura $-2gz^{\mp\frac{2}{n}}\,dx = (\mp \frac{2}{n} vv\,dz + 2\,zv\,dv)\,z^{\mp\frac{2}{n}-1}$. Pour intégrer cette Equation, il ne suffit pas d'écrire $-2g\int z^{\mp\frac{2}{n}}\,dx = vvz^{\mp\frac{2}{n}}$, (car cette valeur de $vvz^{\mp\frac{2}{n}}$, exprimée par $-2g\int z^{\mp\frac{2}{n}}\,dx$, est incomplete, n'appartenant à aucun arc total) mais $2\,g\,A - 2g\int z^{\mp\frac{2}{n}}\,dx = vvz^{\mp\frac{2}{n}}$, où je prends A pour quelque chose de constant, à quoi $\int z^{\mp\frac{2}{n}}\,dx$ devient égal, lorsque x devient l'Abscisse correspondante à quelque arc total, de maniere que A soit constant pour cet arc total

total entier, mais different pour un arc total different.

IV. L'on a donc $vv = 2gAz^{\pm\frac{2}{n}} - 2gz^{\pm\frac{2}{n}}\int z^{\mp\frac{2}{n}}dx =$ (à cause de $z = c^r$, j'entends par c le nombre dont le logarithme est l'unité) $2gAc^{\pm\frac{2r}{n}} - 2gc^{\pm\frac{2r}{n}}\int c^{\mp\frac{2r}{n}}dx$. Et ainsi dt ou le petit tems par l'élément d'un arc total quelconque sera

$$= \frac{dr}{\sqrt{(2gAc^{\pm\frac{2r}{n}} - 2gc^{\pm\frac{2r}{n}}\int c^{\mp\frac{r}{n}}dx)}}$$

ou pour abreger, en multipliant par la constante $\sqrt{2g}$, l'on aura

$$dt\sqrt{2g} = \frac{dr}{\sqrt{(Ac^{\pm\frac{2r}{n}} - c^{\pm\frac{2r}{n}}\int c^{\mp\frac{2r}{n}}dx)}}.$$

Afin donc que le tems, que le corps employe à descendre ou à remonter par un arc total quelconque, soit toujours le même, il faut faire enforte que la valeur de $\int\frac{dt}{2g}$, qu'on vient de trouver, soit égale à quelque fonction semblable de dimension nulle, comme

 par

par exemple, $\int \frac{m\,dP}{\sqrt{(AA-PP)}}$, où j'entends par m un nombre arbitraire constant, & dans laquelle le changement de la lettre A ne change point la valeur de la fonction; car $\int \frac{m\,dP}{\sqrt{(AA-PP)}}$ donne toujours un angle droit pris autant de fois que m contient d'unités, de quelque grandeur qu'on prenne A, lorsque PP devient $= AA$.

V. Pour faire donc ensorte que la valeur du tems qu'on vient de trouver

$$\int \frac{dr}{\sqrt{(Ac^{\pm\frac{2r}{n}} - c^{\pm\frac{2r}{n}}\int c^{\mp\frac{2r}{n}}dx)}}$$

soit semblable à la somme qu'on a choisie $\int \frac{m\,dP}{\sqrt{(AA-PP)}}$, j'écris dans l'expression du tems AA pour A, & je divise l'un & l'autre terme par $c^{\pm\frac{r}{n}}$, & j'ai

$$\int \frac{c^{\mp\frac{r}{n}}dr}{\sqrt{(AA-\int c^{\mp\frac{2r}{n}}dx)}}$$, que je suppose $= \int \frac{m\,dP}{\sqrt{(AA-PP)}}$. La question se réduit donc à faire ensorte que $c^{\mp\frac{r}{n}}dr = m\,dP$, & que de plus $\int c^{\mp\frac{2r}{n}}dx = PP$, car on

on tirera de-là la relation entre r & x dans laquelle A n'entrera point : ce que je fais ainsi.

VI. Par la premiere Equation, l'on a $\frac{1}{m} c^{\mp \frac{r}{n}} dr = dP$; je l'integre, en observant la correction nécessaire, afin que r & P s'évanouïssant, la valeur de P s'évanouïsse aussi, & l'on aura $\mp \frac{n}{m} c^{\mp \frac{r}{n}} \pm \frac{n}{m} = P$; en quarrant, l'on a $\frac{1}{mm} (\mp n c^{\mp \frac{r}{n}} \pm n)^2 = PP$ qui doit être $= \int c^{\mp \frac{2r}{n}} dx$; en differentiant le premier & le dernier, l'on aura $\frac{2}{mm} c^{\mp \frac{r}{n}} dr (\mp n c^{\mp \frac{r}{n}} \pm n) = c^{\mp \frac{2r}{n}} dx$; d'où l'on tire tout d'un coup $dx = \frac{2}{mm} c^{\pm \frac{r}{n}} dr (\mp n c^{\mp \frac{r}{n}} \pm n) = \mp \frac{2n}{mm} dr \pm \frac{2n}{mm} c^{\pm \frac{r}{n}} dr$, où $mm\,dx = \mp 2n\,dr \pm 2n c^{\pm \frac{r}{n}} dr$; en intégrant & faisant encore la correction nécessaire, afin que x s'évanouïssant, r s'éva-

pouffe auffi, l'on aura $mmx = -2nn \mp 2nr \pm 2nnc^{\pm\frac{r}{n}}$; qui est l'Equation exponentielle en termes finis, qui détermine la Tautochrone que l'on cherche. Si l'on veut avoir une Equation differentielle fans quantités exponentielles, on le pourra de la maniere fuivante: Par l'Equation qu'on vient de trouver, l'on a $2nnc^{\pm\frac{r}{n}} = mmx + 2nn \pm 2nr$; mais par l'Equation differentielle qu'on avoit trouvée auparavant, l'on a auffi $2nnc^{\pm\frac{r}{n}} = \pm \frac{mmndx}{dr} + 2nn$; donc $mmx + 2nn \pm 2nr = \pm \frac{mmndx}{dr} + 2nn$, qui réduite, donne $mmxdr \pm 2nrdr = \pm mmndx$, ou $\pm mmxdr + 2nrdr = mmndx$.

VII. *Coroll.* 1. Lorfque $n = \infty$, c'eft-à-dire, lorfque $\frac{vv}{n}$ ou la réfiftance eft nulle, l'on aura $2rdr = mmdx$ & $rr = mmx$; d'où l'on voit que les abfciffes font proportionnelles aux quarrés des arcs correfpondans, & qu'ainfi la Courbe eft la Cycloïde, comme il doit arriver; car dans le Vuide, ou dans un Milieu qui ne réfifte point, il n'y a que la Cycloïde qui puiffe être Tautochrone.

VIII. *Coroll.* 2. Mais fi n demeurant finie, l'on

l'on prend $m = \infty$, l'on trouve $\pm x\, dr = ndx$, qui eſt l'Equation de la Tractoire de M. Huigens, dont la tangente eſt par-tout $= n$; enſorte que cette Tractoire eſt une des Tautochrones dans un milieu réſiſtant comme les quarrés des vîteſſes; mais comme ici le point le plus bas eſt à une diſtance infinie, car c'eſt le point où la tangente ſe confond avec l'aſymptote horizontale, l'on voit que les tems de chaque deſcente, de quelque point de la Courbe qu'on commence à les compter, ſont infinis, mais cependant égaux, car dans certains cas les infinis ont entre eux une raiſon déterminée; paradoxe qui n'a rien de nouveau pour ceux qui ſont verſés dans le Calcul infinitéſimal.

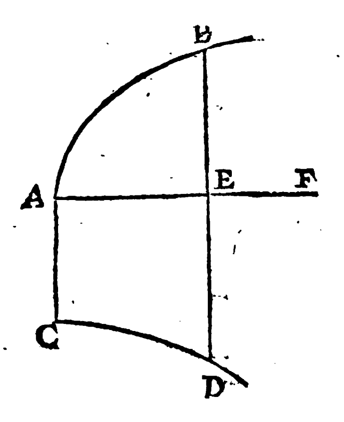
Conſtruction de la Tautochrone.

IX. Voici comme on peut conſtruire la Tautochrone, que nous venons de trouver:

Puiſque $dx = \mp \frac{2ndr}{mm} \pm \frac{2nc^{\pm \frac{r}{n}} dr}{mm}$, l'on aura dy ou $\sqrt{(dr^2 - dx^2)} = dr\sqrt{(m^4 - 4nn + 8nnc^{\pm \frac{r}{n}} - 4nnc^{\pm \frac{2r}{n}})} : mm$, & ainſi $y = \int dr \sqrt{(m^4 - 4nn + 8nnc^{\pm \frac{r}{n}} - 4nnc^{\pm \frac{2r}{n}})} : mm$. Et comme l'on a de

 plus

plus $x = (-2nn \mp 2nr + 2nnc^{\pm \frac{r}{n}}) : mm$, l'on aura les deux valeurs de x & y, en supposant les quadratures & les logarithmes pour une indéterminée r qu'on prendra.



Ayant donc décrit sur l'Axe commun AF les deux Courbes AB & CD, telles que prenant l'abscisse $AE = r$, l'on ait l'appliquée

$$BE = \pm \frac{n}{mm} \mp \frac{2nc^{\pm \frac{r}{n}}}{mm}, \text{ \& l'autre } ED$$

$$\pm \sqrt{(m^4 - 4nn + 8nnc^{\pm \frac{r}{n}} - 4nnc^{\pm \frac{2r}{n}})} :$$

mm, les aires ABE & $ACDE$ divisées par une ligne arbitraire L, donneront les coordonnées de la Courbe que l'on cherche; savoir

voir $\frac{ABE}{L} = x$ & $\frac{ACDE}{L} = y$.

SCHOLIE.

X. m marquant un multiple quelconque arbitraire de l'angle droit, notre solution donnera toujours une infinité de Tautochrones particulieres selon la diversité infinie de m; ce qu'on voit assez, puisque dans le cas même où $m = \infty$, l'on trouve encore une Tautochrone, qui est la Tractoire de M. Huigéns (§. 8.) Au reste, l'on tire de notre Solution générale plusieurs autres Problêmes utiles & curieux, comme ceux-ci.

PROBLEME II.

XI. *La longueur d'un Arc total quelconque descendu dans l'Hypothèse que nous avons prise d'une résistance proportionnelle au quarré de la vitesse, étant donnée, trouver la longueur de l'Arc total remonté qui le suit immédiatement.*

SOLUTION.

Puisque nous avons trouvé pour la descente (§. 4.) $vv = 2gAc^{\frac{2r}{n}} - 2gc^{\frac{2r}{n}} \int c^{-\frac{2r}{n}} dx$ & $\int c^{-\frac{2r}{n}} dx = $ (§. 6.) $\frac{1}{mm} (-nc^{-\frac{r}{n}} + n)^2 = \frac{nn}{mm} (c^{-\frac{2r}{n}} - 2c^{-\frac{r}{n}} + 1)$

 l'on

l'on aura $vv = 2gAc^{\frac{2r}{n}} - \frac{2nng}{mm}(1 - 2c^{+\frac{r}{n}} + c^{+\frac{2r}{n}})$. Suppofant maintenant l'Arc total defcendu $= a$, il faut qu'au commencement de la defcente, vv foit $= 0$, c'eft pourquoi il faut faire $2gAc^{\frac{2r}{n}} = \frac{2nng}{mm}(1 - 2c^{+\frac{r}{n}} + c^{+\frac{2r}{n}})$, d'où l'on tire $A = \frac{nn}{mm}(c^{-\frac{2r}{n}} - 2c^{-\frac{r}{n}} + 1) =$ (lorfque r devient $= a$) $\frac{nn}{mm}(c^{-\frac{2a}{n}} - 2c^{-\frac{a}{n}} + 1) = \frac{nn}{mm}(1 - c^{-\frac{a}{n}})^2$. Et puifque au point le plus bas de la defcente, lorfque $r = 0$, $\int c^{-\frac{2r}{n}} dx$ s'évanouït, l'on aura vv, ou le quarré de la vîteffe finale du mobile defcendant $= 2gAc^{\frac{2r}{n}} =$ (à caufe de $r = 0$) $2gA =$ (à caufe de $A = \frac{nn}{mm}(1 - c^{-\frac{a}{n}})^2$) $\frac{2nng}{mm}$

(1

$(1-c^{-\frac{a}{n}})^2$. Je trouve par un raisonnement semblable, en prenant les signes inférieurs, & nommant l'arc total remonté b, le quarré de la vîtesse initiale du mobile remontant $= \frac{2nng}{mm}(c^{\frac{b}{n}}-1)^2$. Mais la vîtesse finale du mobile descendant est la même que la vîtesse initiale du mobile remontant; d'où il suit que $1-c^{-\frac{a}{n}} = c^{\frac{b}{n}}-1$, & $c^{\frac{b}{n}} = 2-c^{-\frac{a}{n}} = 2-\frac{1}{c^{\frac{a}{n}}} = \frac{2c^{\frac{a}{n}}-1}{c^{\frac{a}{n}}}$; prenant les logarithmes du premier & du dernier, l'on a $\frac{b}{n} = l(2c^{\frac{a}{n}}-1)-\frac{a}{n}$, d'où enfin l'on a $b = nl(2c^{\frac{a}{n}}-1)-a$.

XII. *Scholie.* La valeur de b qu'on vient de trouver, a toujours lieu pour quelque valeur de n que ce soit; mais si $n=\infty$, c'est-à-dire, si la résistance est infiniment petite ou nulle, l'on devroit trouver $b=a$, parce que le mobile dans le vuide remonte aussi haut qu'il étoit descendu, & l'arc total remonté dans la Cycloïde (qui est la Tautochrone dans le vuide) doit être égal à l'Arc total

descendu précédent ; cependant notre expression ne paroît pas donner $b = a$, car $n\, l\left(2c^{\frac{a}{n}} - 1\right) - a$ devient $\infty\, l\left(2c^{\frac{a}{\infty}} - 1\right) - a = \infty\, l\,(2c^{\circ} - 1) - a = \infty\, l\,(2 - 1) - a = \infty\, l\,(1) - a = \infty \times 0 - a$, ce qui ne fait rien connoitre de déterminé ; puisque $\infty \times 0$, ou le produit de l'infini par un infiniment petit, peut exprimer une quantité quelconque. Pour résoudre cette difficulté, j'ai deux moyens, l'un indirect, l'autre direct, de faire voir que $n\, l\left(2c^{\frac{a}{n}} - 1\right) - a$ devient effectivement $= a$, lorsque $n = \infty$. En me servant du premier moyen, je supposerai $b = a$, & chercherai ensuite ce qu'il faut prendre pour n, afin que la valeur de b, $n\, l\left(2c^{\frac{a}{n}} - 1\right) - a$ devienne $= a$; pour cela je fais $a = n\, l\left(2c^{\frac{a}{n}} - 1\right) - a$, d'où l'on a $2a = n\, l\left(2c^{\frac{a}{n}} - 1\right)$; & passant des logarith. aux nombres, j'ai $c^{2a} = \left(2c^{\frac{a}{n}} - 1\right)^n$ ou $c^{\frac{2a}{n}} = 2c^{\frac{a}{n}} - 1$, qui est une Equation quarrée, dont la racine extraite à l'ordinaire, don-

donne $c^{\frac{a}{n}} = 1 \pm \sqrt{(1-1)} = 1 \pm 0$, & prenant les logarithmes, l'on a $\frac{a}{n} = l\,1 = 0$, donc $n = \infty$, d'où il suit que dans le cas où $n = \infty$, l'on aura b ou $nl\,(2c^{\frac{a}{n}} - 1) - a = a$.

XIII. Par le moyen direct, voici ce que je fais; de la quantité $nl(2c^{\frac{a}{n}} - 1)$ je fais cette fraction $l\left(\frac{2c^{\frac{a}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}\right)$ qui lorsque $n = \infty$, devient $\frac{0}{0}$; c'est une fraction dont les deux termes s'évanouissent, il faut donc chercher sa valeur par la règle donnée dans l'Anal. des Infin. petits, art. 163, en considerant n comme variable, & divisant la differentielle du numerateur par la differentielle du dénominateur; ce qui étant fait, l'on aura $dl\,(2c^{\frac{a}{n}} - 1)$ divisé par $d\left(\frac{1}{n}\right)$ c'est-à-dire $-\frac{2c^{\frac{a}{n}}\,dn \times a}{2nnc^{\frac{a}{n}} - nn}$ divisé par $-\frac{dn}{nn}$,

 d'où

d'où il vient $\frac{2c^{\frac{a}{n}}\times a}{2c^{\frac{a}{n}}-1}=$ (en substituant ∞ pour n) $\frac{2a}{2-1}=2a$; d'où je conclus que lorsque $n=\infty$, l'on aura $nl(2c^{\frac{a}{n}}-1)=2a$; & qu'ainsi $b=nl(2c^{\frac{a}{n}}-1)-a=2a-a=a$.

PROBLEME III.

XIV. *Trouver le lieu de la plus grande vitesse dans un Arc total quelconque de descente.*

SOLUTION. Puisque (§. 11.) $uu=2gAc^{\frac{2r}{n}}-\frac{2nng}{mm}(1-2c^{\frac{r}{n}}+c^{\frac{2r}{n}})=$ (*ibid.*) $\frac{2nng}{mm}(1-c^{-\frac{a}{n}})^2c^{\frac{2r}{n}}-\frac{2nng}{mm}(1-2c^{\frac{r}{n}}+c^{\frac{2r}{n}})$; qui étant divisé par la quantité constante $\frac{2nng}{mm}$, donnera $c^{\frac{2r}{n}}(1-c^{-\frac{a}{n}})^2$

$-$

$-(1-2c^{\frac{r}{n}}+c^{\frac{2r}{n}})$, qui doit être un *maximum*, il faut donc faire sa differentielle $=0$, & l'on aura $\frac{2c^{\frac{ar}{n}}dr}{n}(1-c^{-\frac{a}{n}})$ $+\frac{2c^{\frac{r}{n}}dr-2c^{\frac{2r}{n}}dr}{n}=0$, ou divisant par $\frac{2c^{\frac{r}{n}}dr}{n}$, l'on aura $c^{\frac{r}{n}}(1-c^{-\frac{a}{n}})$ $+1-c^{\frac{r}{n}}=0$, d'où l'on tirera par la réduction & le secours des logarithmes, $r=2a-nl(2c^{\frac{a}{n}}-1)$. Si donc d'un arc total $=a$, l'on retranche depuis le point le plus bas, une partie $=2a-nl(2c^{\frac{a}{n}}-1)$ l'on aura le point de la plus grande vîtesse.

XV. *Coroll.* 1. L'arc intercepté entre le commencement de la descente & le point de la plus grande vîtesse, $=a-2a+nl(2c^{\frac{a}{n}}-1)=nl(2c^{\frac{a}{n}}-1)-a$. D'où l'on voit (§. 11.) que cet arc, depuis le commencement de la descente jusqu'au lieu de la plus

plus grande vîtesse; est égal à l'arc remonté suivant.

XVI. *Coroll.* 2. Ajoutant l'arc commun compris entre le point le plus bas & le lieu de la plus grande vîtesse, l'on aura l'arc total descendu égal à l'arc compris entre le point de la plus grande vîtesse, & le point où le mobile cesse de remonter; c'est-à-dire, que le mobile, après qu'il est parvenu à sa plus grande vîtesse en descendant, a encore à parcourir jusqu'à ce qu'il cesse de remonter, un chemin égal à celui qu'il a parcouru depuis le commencement de sa descente jusqu'au point le plus bas.

XVII. *Coroll.* 3. Puisque (§. 11.) l'arc total remonté, ou $b = nl(2c^{\frac{a}{n}} - 1) - a$, l'on aura la somme de l'arc total descendu & de l'arc total remonté, ou $a + b = nl(2c^{\frac{a}{n}} - 1)$ & sa moitié $\frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}nl(2c^{\frac{a}{n}} - 1)$; on voit de-là que le point qui partage en deux également l'arc entier descendu & remonté, est éloigné du point le plus bas, d'un arc $= a - \frac{1}{2}nl(2c^{\frac{a}{n}} - 1)$. Mais puisque l'arc descendu depuis le commencement jusqu'au point de la plus grande vîtesse est $= nl(2c^{\frac{a}{n}} - 1) - a$, la distance de ce-

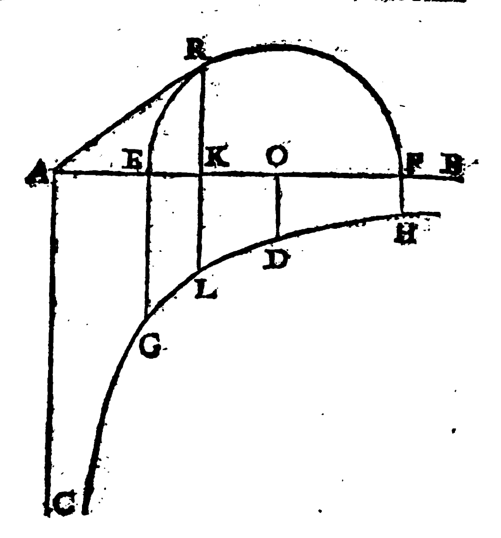
ce point au point le plus bas sera $= a - nl$
$(2c^{\frac{a}{n}} - 1) + a = 2a - nl(2c^{\frac{a}{n}} - 1)$;
d'où il suit que le point de la plus grande vîtesse est deux fois plus éloigné du point le plus bas, que ne l'est de ce même point, le point qui partage en deux également l'arc composé de l'arc descendu & de l'arc remonté.

Construction géométrique des deux Problêmes précédens.

XVIII.* Entre deux Asymptotes AB, AC, perpendiculaires l'une à l'autre, soit décrite l'Hyperbole équilatere GDH, telle qu'ayant pris $AO = n$, l'Appliquée OD soit $= 1$. Soient prises de l'un & de l'autre côté de O, les parties égales OE, OF, & par les points E & F soient tirées les Appliquées EG, FH, paralleles à l'autre Asymptote AC. Je dis que les Aires $ODGE$ & $ODHF$ sont proportionnelles aux Arcs entiers descendus & remontés, c'est-à-dire, si l'on fait $ODGE = a \times OD$, l'aire $ODHF$ sera $= b \times OD$.

Démonstr. D'un point quelconque K, soit menée l'appliquée KL, & soit appellée OK, z; l'on aura par la nature de l'hyperbole, $KL = \frac{n}{n-z}$, & partant l'aire $OKLD = \int \frac{ndz}{n-z}$ $= nl\left(\frac{n}{n-z}\right)$, & l'aire entiere $OEGD$ $= nl\left(\frac{n}{n-OE}\right)$. L'on trouve de même $OFHD$

* Voy. la Figure suivante.



$OFHD = nl\left(\frac{n+OF}{n}\right)$. Prenant donc l'aire $OEGD = a \times OD = a \times 1 = a$, l'on aura $nl\left(\frac{n}{n-OE}\right) = a$. De là repassant aux nombres, l'on aura $\left(\frac{n}{n-OE}\right)^n = c^a$, ou $\frac{n}{n-OE} = c^{\frac{a}{n}}$; d'où l'on tire OE ou $OF = n - nc^{-\frac{a}{n}}$, qui étant substitué pour OF dans $nl\left(\frac{n+OF}{n}\right)$, l'on a l'aire $OFHD = nl\left(\frac{2n-nc^{-\frac{a}{n}}}{n}\right) = nl\left(2-c\right.$

$$(2 - c^{-\frac{a}{n}}) = nl\left(\frac{2c^{\frac{a}{n}} - 1}{c^{\frac{a}{n}}}\right) = nl(2c^{\frac{a}{n}} - 1)$$

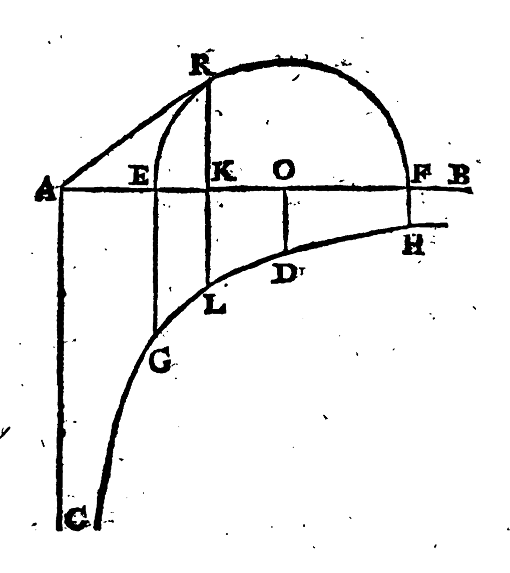
$-a$. Or nous avons trouvé dans l'analyse précédente (§. 11.) que cette expression étoit celle de b; donc l'aire $OFHD = b = b \times 1 = b \times OD$.

LEMME,

Qui sert à déterminer la plus grande vîtesse.

XIX. *Si du centre* O, *& d'un rayon quelconque* OE, *moindre que* OA, *l'on décrit un demi-cercle* ERF *à la circonference duquel l'on prolonge l'ordonnée* LK, *le rectangle* L K × KR *sera proportionnel à la vîtesse qu'aura le mobile, après qu'il sera descendu depuis le commencement d'un arc total exprimé par l'aire* OEGD, *dans l'instant qu'il acheve un arc exprimé par l'aire* EGLK.

Démonstr. Car ayant pris, comme nous avons fait ci-dessus, l'aire $OEGD$, où l'arc total $= a$, l'on a trouvé $OE = n - nc^{-\frac{a}{n}}$. Si donc l'on fait de la même maniere, l'aire $OKLD$, ou l'arc qui reste à parcourir $= r$, l'on aura $OK = n - nc^{-\frac{r}{n}}$. Et ainsi $KL = \frac{AO \times OD}{AK} = c^{-\frac{r}{n}}$, & $KR = \sqrt{(OE^2 - OK^2)}$ $=$



$= n \sqrt{}(2c^{-\frac{r}{n}} - 2c^{-\frac{a}{n}} - c^{-\frac{2r}{n}} + c^{-\frac{2a}{n}})$. Si l'on multiplie KL par KR, l'on aura $LK \times KR = nc^{\frac{r}{n}} \sqrt{}(2c^{-\frac{r}{n}} - 2c^{-\frac{a}{n}} - c^{-\frac{2r}{n}} + c^{-\frac{2a}{n}})$, dont le quarré $= 2nnc^{\frac{r}{n}} - 2nnc^{\frac{2r-a}{n}} - nn$ +

$+ nnc^{\frac{2r-2a}{n}}$, divisé par nn, donne $2c^{\frac{r}{n}} - 2c^{\frac{2r-a}{n}} - 1 + c^{\frac{2r-2a}{n}}$. Mais il est facile de voir que cette quantité est $= c^{\frac{2r}{n}}(1-c^{-\frac{a}{n}})^2 - (1-2c^{\frac{r}{n}}+c^{\frac{2r}{n}})$, ce que nous avons fait voir dans la Solution précédente (§. 14.) être proportionnel à vv ou au quarré de la vîtesse. Donc $LK \times KR$ est proportionnel à la simple vîtesse.

XX. L'on voit par-là que pour déterminer le lieu de la plus grande vîtesse, il n'est question que de tirer entre l'hyperbole & le cercle, la ligne LKR, ensorte que $LK \times KR$ soit le plus grand de tous les rectangles pareils; ce qui étant fait, l'arc total descendu sera à l'arc compris entre le point le plus bas & le point de la plus grande vîtesse, comme l'aire $EGDO$ à l'aire $KLDO$. Or il est évident que le plus grand de tous les rectangles $LK \times KR$ est celui qui se fait lorsque la soutangente de l'hyperbole pour L & la soutangente du cercle pour R sont égales. Mais la soutangente de l'hyperbole est égale à l'abscisse AK par la nature de l'hyperbole; donc la même AK doit aussi être la soutangente du cercle pour le point R. On tire de-là une construction facile & élégante. Du centre de l'hyperbole A, soit tirée AR tangente au cercle, & du point d'attouchement R soit abaissée la perpendiculaire RKL; elle partagera l'aire $EGDO$, qui représente

l'arc

l'arc total, en deux aires *GEKL* & *LKOD*, en même raiſon que le point de la plus grande vîteſſe partage l'arc total.

XXI. *Coroll.* 1. On voit de-là tout d'un coup, ſans aucun calcul, pourquoi, lorſque $n = \infty$, b devient $= a$, c'eſt-à-dire, pourquoi, dans un milieu qui ne réſiſteroit point, l'arc total remonté doit être égal à l'arc total deſcendu. Car n ou AO étant infini, l'arc hyperbolique GDH peut paſſer pour une droite parallele à l'aſymptote AB, & l'aire $ODHF = EGDO$, c'eſt-à-dire, $b = a$. L'on voit auſſi que la tangente AR, tirée d'une diſtance infinie, peut paſſer pour parallele au diametre du cercle EF, & que partant RL paſſera par le centre O, & ſe confondra avec OD. D'où l'on voit que dans ce cas le lieu de la plus grande vîteſſe eſt le point le plus bas, comme il doit arriver dans la Cycloïde, qui eſt la Tautochrone dans le vuide.

XXII. *Coroll.* 2. Puiſque nous avons trouvé ci-deſſus (§. 15.) que l'arc deſcendu, pris depuis le commencement juſqu'au point de la plus grande vîteſſe, eſt égal à l'arc total remonté; il ſuit de-là que l'aire $EGLK$ eſt égale à l'aire $DOFH$, & qu'ainſi $AE . AK :: AO . AF$. Ce qu'on voit d'ailleurs, puiſque la tangente AR eſt moyenne proportionnelle tant entre AE & AF, qu'entre AK & AO, comme il eſt clair par la nature du cercle.

XXIII. *Scholie.* Voici quelque choſe d'utile & de digne de remarque ſur notre Courbe tautochrone; c'eſt de déterminer juſqu'à quelle hauteur elle peut s'élever, ou quel peut être

être le plus grand arc total descendu; car il est certain que cette Courbe, à prendre son commencement au point le plus bas, loin de s'élever à une distance infinie, doit au contraire se terminer, & redescendre ensuite par une espece de pointe ou point de rebroussement, comme on sait qu'il arrive à la Cycloïde elle-même, qui est la Tautochrone dans le cas d'une résistance nulle ou infiniment petite. En effet, si quelque Tautochrone s'étendoit à l'infini, l'on voit assez que le tems de la descente par un arc infiniment long ne pourroit pas être fini & déterminé, contre l'hypothese; car une vîtesse toujours finie dans un tems fini ne sauroit faire parcourir un espace infini. Afin donc que nous trouvions jusqu'où notre Tautochrone doit s'élever, & que nous déterminions le point où commence le plus grand arc possible de descente, ou le point de rebroussement, voici comme je raisonne: Puisque l'on a trouvé ci-dessus (§. 9.) $dy = dr\sqrt{(m^4 - 4nn + 8nnc^{\frac{r}{n}} - 4nnc^{\frac{2r}{n}}} : mm$, l'on voit d'abord qu'au point le plus bas, lorsque $r = 0$, $dy = dr$; ce qui fait voir que l'axe est perpendiculaire à la Courbe, comme il doit arriver; autrement ce ne seroit pas le point le plus bas: mais ensuite en s'éloignant de ce point, la raison de dy à dr décroît jusqu'à ce qu'elle devienne nulle, ce qui arrive lorsque la Courbe est perpendiculaire à l'appliquée. Je dis maintenant que la Courbe ne s'étend pas au-delà de ce point, & qu'ainsi c'est

c'eſt le point le plus élevé; car ſi la Courbe s'élevoit davantage, $4nn - 8nnc^{\frac{r}{n}} + 4nnc^{\frac{2r}{n}}$ feroit plus grand que m^4, & partant dy ou $dr\sqrt{(m^4 - 4nn + 8nnc^{\frac{r}{n}} - 4nnc^{\frac{2r}{n}})}$ ſeroit imaginaire ou impoſſible; donc afin que dy ſoit $= 0$, ce qui termine le plus grand arc, il faut que m^4 ſoit $= 4nn - 8nnc^{\frac{r}{n}} + 4nnc^{\frac{2r}{n}}$, ou extrayant la racine, il faut que mm ſoit $= 2nc^{\frac{r}{n}} - 2n$; d'où l'on tire $\frac{mm + 2n}{2n} = c^{\frac{r}{n}}$ & prenant les logarithmes, $l\left(\frac{mm + 2n}{2n}\right) = \frac{r}{n}$, c'eſt-à-dire, $r = nl\left(\frac{mm + 2n}{2n}\right) =$ au plus grand arc poſſible de deſcente qui termine la Courbe.

XXIV. *Coroll.* 1. Nous avons trouvé en général (§. 6.) pour la deſcente $mmxdr + 2nrdr = mmndx$; donc pour le plus grand arc total, lorſque $dy = 0$, & qu'ainſi $dx = dr$, l'on aura $mmx + 2nr = mmn$, d'où l'on tire $x = \frac{mmn - 2nr}{mm} =$ (ſubſtituant pour r ſa valeur) $n - \frac{2nn}{mm} l\left(\frac{mm - 2n}{2n}\right) =$ la plus grande abſciſſe poſſible.

XXV. *Coroll.* 2. Si $m = \infty$, mais que n ſoit

ſoit fini, l'on aura r ou $nl\left(\frac{mm+2n}{2n}\right)=\infty$; mais $\frac{2nn}{mm}l\left(\frac{mm+2n}{2n}\right)=0$, donc x ou la plus grande abſciſſe $=n$, ce qui convient à la Tractoire.

XXVI. *Coroll.* 3. Si au contraire m eſt fini, mais n infini, ce qui eſt le cas de la Tautochrone ordinaire dans le vuide, l'on aura $r=\infty\, l\, 1=\infty\times 0$; ce qui ne donne rien de déterminé; il faut donc encore ſe ſervir ici de la règle de l'Anal. des Infin. petits, art. 163. En conſiderant $nl\left(\frac{mm+2n}{2n}\right)$ ſous la forme de cette fraction $\frac{l\left(\frac{mm+2n}{2n}\right)}{\frac{1}{n}}$, dont la differentielle du numérateur, diviſée par la differentielle du dénominateur, donne cette autre fraction $\frac{mmn}{mm+2n}=$ (lorſque $n=\infty$) $\frac{1}{2}mm$.

XXVII. *Coroll.* 4. Dans ce même cas la plus grande abſciſſe $n-\frac{2nn}{mm}l\left(\frac{mm+2n}{2n}\right)$ devient $\infty-\frac{2\infty^2}{mm}l\,1=\infty-\frac{2\infty^2}{mm}\times 0$, ce qui encore ne détermine rien; il faut donc, afin d'y pouvoir appliquer la règle dont on s'eſt déja ſervi, l'exprimer ſous la forme de cette frac-

fraction $\frac{\frac{1}{n} - \frac{2}{mm} l \left(\frac{mm+2n}{2n}\right)}{\frac{1}{nn}}$, & l'on trouve, en opérant bien, $x = \frac{1}{4} mm$; enforte que le plus grand arc eſt double de la plus grande abſciſſe, comme il arrive dans la Cycloïde, où le plus grand arc, depuis le point le plus bas, eſt double du diametre du Cercle générateur. Ce qui confirme merveilleuſement notre méthode.

PROBLEME IV.

XXVIII. *La longueur d'un Arc total remonté quelconque étant donnée, trouver la longueur de l'Arc total deſcendu qui l'a précédé.*

SOLUTION.

On peut ſe ſervir ici de la méthode que nous avons employée dans la Solut. du Probl. 2. (§. 11.) en prenant les ſignes inférieurs dans l'expreſſion du quarré de la vîteſſe vv, & opérant enſuite, comme l'on a fait, avec les changemens néceſſaires. Mais on parviendra plus facilement au but, ſi l'on fait à l'Equation que l'on a trouvée pour la longueur de l'arc remonté (§. 11.) $b = nl (2c^{\frac{a}{n}} - 1) - a$, les changemens néceſſaires, afin d'avoir la valeur de a exprimée par b; ce que je fais ainſi: Puiſque $b = nl (2c^{\frac{a}{n}} - 1) - a$,

$-a$, l'on aura $a+b = nl(2c^{\frac{a}{n}} - 1)$ ou $\frac{a+b}{n} = l(2c^{\frac{a}{n}} - 1)$, & passant des logarith. aux nomb. l'on a $c^{\frac{a+b}{n}} = 2c^{\frac{a}{n}} - 1$; divisant maintenant par $c^{\frac{a}{n}}$, il vient $c^{\frac{b}{n}} = 2 - c^{-\frac{a}{n}}$, & repassant aux logarith. l'on aura $\frac{b}{n} = l(2 - c^{-\frac{a}{n}})$, d'où l'on tire $b = nl(2 - c^{-\frac{a}{n}})$; & ainsi l'on trouve b autrement & plus simplement que l'on n'a fait (§. 11.). Mais comme c'est ici a que l'on cherche, je transpose $c^{-\frac{b}{n}}$ & $c^{-\frac{n}{n}}$ en changeant les signes, & j'aurai $c^{-\frac{a}{n}} = 2 - c^{\frac{b}{n}}$, & prenant les logarith. $-\frac{a}{n} = l(2 - c^{\frac{b}{n}})$, d'où l'on tire $a = -nl(2 - c^{\frac{b}{n}})$, ou, ce qui revient au même, $a = nl(1 : 2 - c^{\frac{b}{n}})$.

XXIX. Puisque $a = nl\,(1 : 2 - c^{\frac{b}{n}})$ & $b = nl\,(2 - c^{-\frac{a}{n}})$, l'on aura $a + b = nl$ $\left(\frac{2 - c^{-\frac{a}{n}}}{2 - c^{\frac{b}{n}}}\right)$; mais par §. 11, l'on a aussi $a + b = nl\,(2c^{\frac{a}{n}} - 1)$, donc $2c^{\frac{a}{n}} - 1$ $= \frac{2 - c^{-\frac{a}{n}}}{2 - c^{\frac{b}{n}}}$; & l'on a, en réduisant, $4c^{\frac{a}{n}}$ $- 2c^{\frac{a+b}{n}} + c^{\frac{b}{n}} + c^{-\frac{a}{n}} = 4.$ L'on peut donc trouver, en rétrogradant, par cette Equation exponentielle, quoique fort composée, a par b, & réciproquement b par a, ce qui seroit peut-être fort difficile à trouver *à priori*.

XXX. *Scholie*. Par ce que nous avons démontré (§. 23.) l'on pourra encore déterminer le plus grand arc possible remonté, comme aussi la plus grande abscisse qui lui convient. Cela se peut par le moyen de l'Equation trouvée (§. 11.) $b = nl\,(2c^{\frac{a}{n}} - 1) - a$, ou de cette autre équivalente dont nous venons de

de parler, $b = nl\left(2 - c^{-\frac{a}{n}}\right)$, substituant dans l'une ou l'autre pour a ce qu'on a trouvé ci-dessus (§. 23.) $nl\left(\frac{mm+2n}{2n}\right)$ pour le plus grand arc descendu; car l'on aura b ou le plus grand arc remonté (en se servant de la derniere formule) $= nl\left(2 - c^{-l\left(\frac{mm+2n}{2n}\right)}\right)$: mais cette expression étant embarassée & peu élégante, à cause de l'exposant logarithmique contenu sous un autre signe logarithmique; voici une maniere particuliere de la réduire à une expression logarithmique simple & ordinaire: je fais $2 - c^{-l\left(\frac{mm+2n}{2n}\right)} = z$, partant $c^{-l\left(\frac{mm+2n}{2n}\right)} = 2 - z$, & leurs logarith. $-l\left(\frac{mm+2n}{2n}\right) = l(2-z)$; d'où repassant aux nombres, à la maniere ordinaire, l'on aura $\frac{2n}{mm+2n} = 2 - z$; donc $z = \frac{2mm+2n}{mm+2n}$, & $2 - c^{-l\left(\frac{mm+2n}{2n}\right)} = \frac{2mm+2n}{mm+2n}$, & $nl\left(2 - c^{-l\left(\frac{mm+2n}{2n}\right)}\right) = nl\left(\frac{2mm+2n}{mm+2n}\right) =$ au plus grand arc total remonté.

XXXI. *Coroll.* L'on peut par-là trouver la plus

plus grande longueur de toute la Tautochrone, c'est-à-dire, celle que le mobile peut parcourir pendant une oscillation entiere, en descendant & remontant ensuite. Car le plus grand arc total descendu étant $= nl \left(\frac{mm + 2n}{2n}\right)$, & le plus grand arc total remonté immédiatement après, étant $= nl \left(\frac{2mm + 2n}{mm + 2n}\right)$, leur somme $nl \left(\frac{mm + 2n}{2n}\right) + nl \left(\frac{2mm + 2n}{mm + 2n}\right)$, qui étant réduite, donne $nl \left(\frac{mm + n}{n}\right)$, sera $=$ à la plus grande longueur de la Tautochrone qui puisse être parcourue par le mobile en descendant & remontant consécutivement.

XXXII. Quant à la plus grande abscisse x, qui répond au plus grand arc remonté; il faut remarquer qu'il n'est plus permis de supposer $dx = dr$, comme nous avons fait pour la descente (§. 24.): car le plus grand arc remonté n'est point absolument le plus grand, mais seulement relativement au plus grand arc descendu, par lequel le mobile parvenant au point le plus bas, remonte ensuite aussi haut que le lui permet la vîtesse qu'il avoit acquise au point le plus bas; mais ce n'est pas à dire pour cela que quelque force externe, indépendamment de la force de la chûte, imprimant au mobile une plus grande vîtesse que celle qu'il acquiert en descendant librement par le plus grand arc de descente, ne pût le faire remonter plus haut, & partant ne pût lui faire décrire un arc plus long. Il faut donc distinguer le cas où le mobile re-

remonte librement par la feule force qu'il a acquife en defcendant, & celui où le mobile remonte, pouffé par quelque force étrangere qui agiroit fur lui au point le plus bas de la Tautochrone, quand même il ne feroit point defcendu. Ici donc nous entendons le plus grand arc remonté librement, dont nous cherchons l'abfciffe x, ou la plus grande hauteur verticale à laquelle le mobile puiffe s'élever, après être defcendu par le plus grand arc. Pour cela je prends l'Equation trouvée (§. 6.) avec les fignes inférieurs, $mmx = -2nn + 2nr + 2nnc^{-\frac{r}{n}}$, dans laquelle, à la place de r, j'écris le plus grand arc total remonté librement, qui (§. 30.) eft $= nl \left(\frac{2mm + 2n}{mm + 2n}\right)$; & j'aurai $mmx = -2nn + 2nn\, l \left(\frac{2mm + 2n}{mm + 2n}\right) + 2nnc^{-l\left(\frac{2mm + 2n}{mm + 2n}\right)}$ = (parce que, comme nous avons vu (§. 30.) $c^{-l\left(\frac{2mm + 2n}{mm + 2n}\right)} = \left(\frac{mm + 2n}{2mm + 2n}\right)$) $-2nn + 2nn\, l \left(\frac{2mm + 2n}{mm + 2n}\right) + \frac{mmnn + 2n^3}{mm + n}$ = (après la réduction) $2nn\, l \left(\frac{2mm + 2n}{mm + 2n}\right) - \frac{mmnn}{mm + n}$; donc $x = \frac{2nn}{mm} l \left(\frac{2mm + 2n}{mm + 2n}\right) - \frac{nn}{mm + n}$.

XXXIII. Puifque pour la defcente, la plus grande

grande abſciſſe (§. 24.) $= n - \frac{2nn}{mm} l \left(\frac{mm+2n}{2n}\right)$; ſi l'on en retranche la plus grande abſciſſe pour l'aſcenſion libre, le reſte ſera la quantité, dont la hauteur de laquelle eſt deſcendu le corps, ſurpaſſe la hauteur à laquelle il eſt remonté, & cette difference ſera $= \frac{mmn+2nn}{mm+n} - \frac{2nn}{mm} l \left(\frac{mm+n}{n}\right)$; qui s'évanouït, lorſque $n = \infty$, comme on le trouve par la règle tirée de l'Anal. des Infin. petits; & cela doit être ainſi dans la Tautochrone ordinaire pour le vuide, où le mobile deſcend & remonte à la même hauteur.

XXXIV. Il nous reſte à déterminer auſſi le plus grand arc remonté par une force imprimée au mobile au point le plus bas, c'eſt-à-dire, juſqu'où la Tautochrone s'étend du côté de l'arc remonté, avant que de parvenir au point de rebrouſſement, ſi elle en a un, où la Courbe ſe termine & change ſa courbure, comme font les Courbes rebrouſſantes. Pour cela il nous faut recourir à l'Equation (§. 9.) pour l'arc remonté, qui eſt celle-ci, $dy = dr \sqrt{(m^4 - 4nn + 8nnc^{-\frac{r}{n}} - 4nnc^{-\frac{2r}{n}})} : mm$. Afin donc d'avoir le plus grand arc total remonté par une force étrangere, il faut faire $dy = 0$, & par conſequent $m^4 = 4nn - 8nnc^{-\frac{r}{n}} + 4nnc^{-\frac{2r}{n}} =$

$= (2n - 2nc^{-\frac{r}{n}})^2$; & extrayant la racine, $mm = 2n - 2nc^{-\frac{r}{n}}$, d'où l'on tire $c^{-\frac{r}{n}} = \frac{2n - mm}{2n}$, & prenant les logarithmes $-\frac{r}{n} = l\left(\frac{2n - mm}{2n}\right)$, ce qui donne $r = -nl\left(\frac{2n - mm}{2n}\right)$, ou, ce qui est la même chose, $r = nl\left(\frac{2n}{2n - mm}\right) =$ au plus grand arc total remonté par une force étrangere au-delà duquel la Courbe ne s'étend plus.

XXXV. *Coroll.* 1. Si l'on prend $mm = 2n$, l'on aura $r = nl\left(\frac{2n}{o}\right) = \infty$; dans ce cas donc l'arc remonté devient infiniment long, d'où l'on voit encore que les Tautochrones se varient selon la valeur du nombre arbitraire mm.

XXXVI. *Coroll.* 2. Le plus grand arc remonté par une force étrangere, est toujours plus grand que le plus grand arc remonté librement, quel que soit le nombre mm, ce que je démontre ainsi: $2n \times (mm + 2n) = 2mmn + 4nn > 2mmn + 4nn - 2m^4 = (2n - mm) \times (2mm + 2n)$, donc $\frac{2n}{2n - mm} > \frac{2mm + 2n}{mm + 2n}$, & partant aussi $nl\left(\frac{2n}{2n - mm}\right)$ ou le-

le plus grand arc remonté par une force étrangere, eſt plus grand que $nl\left(\frac{2mm+2n}{mm+2n}\right)$, c'eſt-à-dire, plus grand que le plus grand arc remonté librement. (§. 30.)

XXXVII. Enfin il faut trouver la plus grande abſciſſe pour l'arc remonté par une force étrangere, c'eſt-à-dire, celle qui répond au point de rebrouſſement de l'arc remonté. Pour cela je me ſers de l'Equation (§. 6.) dont je me ſuis déja ſervi (§. 32.) pour trouver le plus grand arc remonté librement, ſavoir $mmx = -2nn + 2nr + 2nnc^{-\frac{r}{n}}$, & maintenant j'y ſubſtitue pour r le plus grand arc total remonté par une force étrangere, qui eſt (§. 33.) $= nl\left(\frac{2n}{2n-mm}\right)$, ce qui me donnera $mmx = -2nn + 2nnl\left(\frac{2n}{2n-mm}\right) + 2nnc^{-l\left(\frac{2n}{2n-mm}\right)}$ $= \left(c^{-l\left(\frac{2n}{2n-mm}\right)}\right.$ étant $\left.= \frac{2n-mm}{2n}\right) - 2nn + 2nnl\left(\frac{2n}{2n-mm}\right) + 2nn - mmn = 2nnl\left(\frac{2n}{2n-mm}\right) - mmn$; d'où l'on tire $x = \frac{2nn}{mm} l\left(\frac{2n}{2n-mm}\right) - n =$ à la plus grande abſciſſe pour l'arc remonté par une force étrangere.

XXXVIII. Si $mm = 2n$, l'on aura

$x =$

$x = nl\left(\frac{2n}{0}\right) - n = \infty$; d'où il suit que le point de rebroussement de l'arc remonté, dans le cas $mm = 2n$, est infiniment éloigné de l'horizontale tirée par le point le plus bas, c'est-à-dire, que l'abscisse devient infiniment longue. Et afin que le mobile puisse remonter dans la Courbe à cette hauteur infinie, il faut qu'il ait au point le plus bas une vîtesse initiale infinie, c'est-à-dire, plus grande qu'aucune vîtesse donnée.

DE L'IMPORTANCE DE L'ANALOGIE, & des rapports que les Arbres doivent avoir entre eux pour la réussite & la durée des Greffes.

Par M. DU HAMEL. *

J'EUS occasion l'année derniere, dans un Mémoire qui avoit pour titre, *Recherche sur les Causes de la Multiplication des Especes de Fruits, &c.* d'examiner en passant l'anatomie de la Greffe, ou l'arrangement organique des fibres de plusieurs especes d'Arbres dans l'endroit de l'application de cette Greffe; & j'y reconnus un changement de direction dans les fibres & un entortillement de vaisseaux, qui imitant fort la méchanique de certaines glandes, ou formant un viscere nouveau, peuvent bien être capables de donner

* 19 Avril 1730.

ner quelques perfections aux Fruits, mais nullement de produire ces changemens prompts & essentiels que lui attribuent la plupart des Auteurs d'Agriculture.

Cet examen des parties de la Greffe ne m'ayant pas paru suffisant pour détruire un sentiment si généralement adopté, à moins que ces Observations anatomiques ne fussent soutenues par des Expériences exactes & plusieurs fois réiterées ; je rapportai plusieurs Greffes que l'on pratique tous les jours sur differens sujets, sans qu'il en arrive de changement dans les especes ; comme d'une même espece de Pêche sur Amandier, sur differentes especes de Pruniers & sur Abricotiers ; d'une même espece de Poires sur Pommier, sur Coignassier, sur Sauvageon-Poirier, ou sur l'Epine blanche ; d'une même espece de Prune sur diverses especes de Pruniers, & sur Pêcher de Noyau, même sur Abricotier & sur Amandier ; car quoique ces deux dernieres Greffes ne m'ayent point donné de fruit, leurs bois & leurs feuilles m'ont fait suffisamment connoitre que les especes n'étoient pas changées.

Je promis outre cela de rendre compte à l'Académie du succès d'un nombre d'autres Greffes & d'Ecussons que j'avois fait exécuter conformément aux differens procedés qui se trouvent dans presque tous les Traités d'Agriculture, tels que de greffer le Poirier sur le Chêne, sur le Charme, sur l'Orme, sur l'Erable, sur le Prunier, &c. le Meurier sur l'Orme, sur le Figuier & sur le Coignassier ; le Cerisier sur le Laurier-Cerise ; le Pêcher

cher ſur le Noyer; la Vigne ſur le Ceriſier & ſur le Noyer; & une infinité d'autres Greffes & Ecuſſons de cette nature.

Le peu de ſuccès de ces Greffes n'a pas ſeulement ſervi à me perſuader que ces Auteurs avoient avancé ces Expériences ſans les avoir faites, & ſeulement ſur des vraiſemblances; mais outre cela m'a fait faire des réflexions ſur un certain rapport & un accord néceſſaire qui doivent être entre la Greffe & le ſujet, ſans lequel, ou elle ne prend point du tout, ou ſi elle prend, elle ne durera pas longtems. Je crois cependant devoir remarquer que quoique les Greffes que je viens de nommer, ne m'ayent pas réuſſi trois années de ſuite que je les ai fait exécuter ſucceſſivement en fente, en écuſſon, à œil pouſſant, à œil dormant & par approche; cependant la plupart ne me ſerviront pas d'exemple dans ce Mémoire, parce que j'entrevois encore quelques eſperances de réuſſite dans des Expériences que je me propoſe d'exécuter l'année prochaine: je m'attacherai ſeulement à quelques-unes de ces Greffes que j'ai eu lieu d'examiner de plus près, & d'une maniere plus circonſtanciée, parce qu'elles m'ont donné occaſion de faire pluſieurs Remarques & Obſervations ſingulieres, dont la Phyſique & l'Agriculture pourront, je crois, tirer quelque avantage.

Les voici en peu de mots, ſéparées des Expériences qui y ont donné naiſſance. Je réſerve pour un autre lieu le détail de ces Expériences.

Il n'eſt pas beſoin de remarquer qu'il y a

des Greffes qui reprennent avec une facilité ſurprenante, c'eſt une choſe trop connue.

Mais quelques-unes des Greffes que j'ai appliquées, ont péri ſur le champ, & n'ont pas donné la moindre eſperance de repriſe.

Les autres, après s'être entretenues longtems vertes, ont par la ſuite également péri; pluſieurs ont pouſſé à la premiere ſève, & n'ont pu ſubſter juſqu'à la ſeconde.

Quelques-unes ſe ſont ſoutenues les deux ſèves, & n'ont pu paſſer l'Automne. Il y en a eu qui ont fort bien pouſſé deux ou trois ans, & ont dans la ſuite ſubi le même ſort que les précédentes.

Mais ce qui eſt important à obſerver, eſt que quelques-unes ont péri ſans que le ſujet en ſouffrît, & que d'autres n'ont paru périr que par la mort du ſujet.

Ce qu'il y a encore de ſingulier, c'eſt que la plupart des Arbres greffés ne durent pas ſi longtems que s'ils ne l'étoient pas: je dis la plupart, car j'en ai remarqué quelques-uns qui m'ont paru ſubſiſter plus longtems étant greffés que ne l'étant pas. Mais ce ſecours étant indépendant de l'analogie, comme on le verra dans le détail de cette Expérience, il n'en réſulte aucune exception à la règle générale.

Quelquefois même une Greffe appliquée ſur un ſujet qui ne dure que peu d'années de ſa nature, ſubſiſtera plus longtems que l'étant ſur un autre que l'on regarde comme plus robuſte, & qui eſt d'un naturel à vivre davantage.

Quand on ne feroit aucune attention aux utili-

utilités de la Greffe, ces Observations ne découvrent-elles pas une bizarrerie, souvent même une opposition d'évenemens assez singuliers pour exciter la curiosité d'un Physicien, & pour être surpris qu'une pratique, d'ailleurs si belle, si utile & si nécessaire, n'ait été étudiée, & ne le soit encore que de très peu de personnes?

C'est ce qui m'a fait souhaiter depuis longtems de connoitre la Greffe, mais ce n'est que depuis quelques années que je me suis apperçu de la difficulté qu'il y avoit à y parvenir. Elle peut être pratiquée sur tous les Arbres; ainsi, pour la connoitre parfaitement, il faudroit avoir la connoissance non seulement de tous les Arbres, mais encore de la nature & de l'organisation des parties dont ils sont composés, pour établir les rapports & les contrarietés d'où naissent les succès differens que nous remarquons dans les Greffes.

Nos connoissances sont si bornées sur ce point, qu'il est presque impossible d'en établir des règles certaines.

Aussi mes vues ne sont-elles point d'indiquer par l'anatomie des Arbres les Greffes qui pourroient réussir; mais seulement d'expliquer par le peu de connoissance que nous avons de cette anatomie, les Observations qui résultent d'un nombre d'Expériences que j'ai faites à ce sujet: c'est ce qui m'oblige de faire quelques réflexions sur l'anatomie des Arbres & de la Greffe, avant de passer à l'explication de chaque Observation, à laquelle je joindrai le détail des Expériences qui y ont donné lieu.

Une

Une règle générale pour qu'une Greffe réussisse parfaitement, est qu'il faut qu'elle se joigne si intimement avec le sujet sur lequel on l'applique, qu'elle ne fasse qu'un corps avec lui, & qu'elle devienne comme une de ses branches.

Si les Arbres se ressembloient tous, que leurs liqueurs fussent de même qualité, que la configuration de leurs parties solides & de leurs vaisseaux fût la même, que leurs diametres fussent égaux, leur élasticité semblable, la quantité de leurs trachées pareille, & ces trachées également remplies d'air, la réussite des Greffes seroit probablement certaine, & la même dans tous les Arbres. Mais cette conformité & ces rapports se trouvent-ils entre eux? c'est ce qu'il faut examiner.

L'on sait, & il est inutile de s'en souvenir, que les Arbres sont composés d'une multitude de fibres creuses; & depuis les Observations de M^rs. Malpighi & Grew, l'on ne doute plus que chaque Arbre n'ait ses fibres de diametres inégaux & de figures differentes. Ainsi (comme je l'ai remarqué dans celui de mes Mémoires que j'ai cité) lorsqu'on applique une Greffe, il se doit faire tant aux orifices des fibres de la Greffe que de celles du sujet, des sections plus ou moins considerables suivant la difference des diametres, & la disproportion de figure qui se rencontre entre les fibres de l'un & de l'autre; & cette disproportion, lorsqu'elle est considerable, est probablement un obstacle à la réussite des Greffes.

Si nous entrevoyons quelques differences en-

entre les parties solides des Plantes, nous n'en découvrons pas de moins marquées entre les fluides. Les unes ont leur sève blanche comme du lait, d'autres l'ont rousse, d'autres l'ont claire & limpide, les unes l'ont coulante, les autres l'ont visqueuse. Leurs differences se manifestent encore plus par le goût & à l'odorat, puisqu'il y en a de douces, de suaves, d'agréables, d'aigres, d'ameres, d'âcres, de caustiques, de même que quelques-unes sont aromatiques, au-lieu que d'autres sont fétides & puantes.

Ces differences s'étendent presqu'à l'infini, & suivant qu'elles sont plus ou moins considerables, elles deviennent des causes de la varieté du succès des Greffes.

Suivant ce que je viens d'établir, la differente qualité des sèves produit une grande difference entre les Arbres ; mais si nous faisons attention à la quantité de cette sève, elle nous donnera une nouvelle cause de differences qui ne sera pas moins essentielle, puisqu'il y a des Arbres, tels que le Saule, qui dans une année font des poussées si considerables, que d'autres, comme le Buis, pourroient à peine les égaler dans l'espace de douze ou quinze années.

Examinons maintenant, pour ne pas s'arrêter à des particularités inutiles, une autre difference plus sensible, & peut-être plus considerable que les précédentes, qui se rencontre cependant entre plusieurs Arbres : c'est celle de leur Printems, ou plutôt du tems de leur pousse en cette saison : car l'Amandier est en fleur avant que les autres Arbres

bres ayent ouvert leurs boutons; quand les autres Arbres sont en fleurs, il est garni de feüilles, & son fruit est noué avant que le Meurier ait commencé à pousser.

Que de differences entre les Arbres, me dira-t-on? & comment se peut-il faire que malgré ces oppositions, quantité de Greffes reprennent, qu'un Arbre adopte une branche qui lui est si étrangere, pour la nourrir comme la sienne propre, & que cette branche qui change subitement de nourriture, s'en accommode & profite assez souvent mieux que sur son propre tronc?

La question est embarassante, & j'avouerai qu'il est plus aisé de comprendre comment certains Arbres refusent de s'allier par la Greffe, que d'expliquer la facilité avec laquelle d'autres reprennent. L'Expérience est constante cependant; & si l'on greffe en œil poussant un Poirier, par exemple, sur un autre, ou un Cerisier sur le Mérisier, on sera surpris de le voir pousser quelques jours après, acquérir plus de demi-pied de longueur en quinze jours de tems. Je ne chercherai point d'autre explication de cette Expérience, qu'un grand rapport entre les deux Arbres à tous égards, de même qu'une contrarieté manifeste entre le Prunier & l'Orme que je donne pour exemple des Greffes qui ne donnent aucune marque de reprise, parce que les ayant greffés plusieurs fois l'un sur l'autre, la Greffe a toujours péri sur le champ.

Dans le nombre d'expériences que j'ai faites, j'ai remarqué une grande quantité de Greffes qui semblent tenir le milieu entre les

les deux exemples que je viens de donner, en ce qu'elles ne périssoient pas si promptement, car celles qui étoient faites avant l'Automne s'entretenoient vertes tout l'Hiver, comme celles qui ont repris & celles que j'avois fait faire au Printems s'entretenoient vertes un mois & même plus sans aucune apparence de pousser; il y en a même eu entre les unes & les autres qui ont poussé la premiere sève, même quelquefois la seconde, & qui n'ont pas laissé pour cela de périr. La Greffe du Poirier sur l'Orme, le Charme, l'Erable, celle du Meurier sur l'Orme, le Figuier, & un grand nombre d'autres, peuvent être données pour exemple.

Si l'on recherche les raisons de ces faits dans l'anatomie de ces Greffes, on trouvera par l'examen particulier des sujets, qu'ils n'ont eu avec elles qu'une legere communication par le moyen de quelques fibres qui leur ont fourni assez de nourriture pour les entretenir dans leur verdeur, même pour, dans le tems de la grande sève, leur faire produire quelques bourgeons; le reste des fibres, & qui assez souvent sont en plus grand nombre sera noir, desseché, ou plutôt abreuvé, tantôt de gomme, & tantôt d'une sève corrompue, qui est presque comme de la boue, ce qui n'arrive que par la disproportion des vaisseaux, ou par la differente qualité des liqueurs; obstacles évidens à l'union parfaite de toutes les fibres & à l'introduction de la sève, qui n'ayant pu enfiler les vaisseaux de la Greffe, a dû nécessairement sé-

jour-

journer & ſe corrompre dans l'endroit de l'application.

J'ai dit, dans le détail de mes obſervations, qu'il y avoit des Greffes qui pouſſoient à merveille la premiere année, & donnoient de grandes eſperances de réuſſite, que cependant la ſeconde ou la troiſieme année elles ne manquoient pas de périr.

La Greffe de l'Amandier ſur le Prunier, & celle du Prunier ſur l'Amandier, m'en ont fourni deux beaux exemples, qui méritent bien d'être examinés chacun en particulier.

J'avois fait écuſſonner à la ſeve d'Août des Amandiers ſur des Pruniers de petit Damas noir, ſur la foi de pluſieurs Auteurs, qui aſſûrent que par ce moyen on retarde la ſeve de l'Amandier, ce qui fait qu'il n'eſt pas tant expoſé aux gelées du Printems. Les écuſſons ſe collerent à merveille à leurs ſujets, conſerverent leur verdure pendant tout l'Hiver, pouſſerent avec force au Printems & l'Eté, enſorte qu'en Automne ces Amandiers étoient garnis de feuilles, lorſque les autres en étoient tout dépouillés; on ne peut guere une plus belle eſperance. J'en fis lever quelques-uns de la Pépiniere pour mettre en place; mais ceux que j'avois ainſi tranſplanté, moururent au Printems, & les autres qui étoient reſtés dans la Pépiniere, continuerent encore à pouſſer paſſablement le reſte de l'année, & au Printems de l'année ſuivante la plupart éprouverent le ſort des premiers. Je dis la plupart, car j'en ai encore deux qui ne ſont pas entierement péris, mais à peine les Gref-

fes

ses ont-elles assez de force pour se garnir de feuilles, & les sujets diminuent tous les jours de grosseur, ce qui annonce une mort prochaine.

Des circonstances essentielles à remarquer, c'est que le Prunier, dans l'endroit de la Greffe, paroissoit appauvri & comme diminué de grosseur; & que l'Amandier y formoit un gros bourlet, effet de la vivacité avec laquelle il avoit poussé.

On ne peut attribuer ce défaut de réussite, ni à la disproportion des fibres de ces deux Arbres, ni à la qualité differente de leur sève; la facilité que cette Greffe a eue à reprendre, & la vivacité avec laquelle elle a poussé, établissent au contraire l'analogie des sujets; de plus, on greffe tous les jours, & avec un égal succès, le Pêcher sur le Prunier & sur l'Amandier, ce qui ne pourroit pas être, si ces deux Arbres étoient d'une nature bien differente.

Pourquoi le Prunier a-t-il donc paru appauvrir, est-ce qu'il n'a pas assez de sève pour nourrir l'Amandier? Il fait cependant dans nos Jardins un Arbre presqu'aussi grand, cela est vrai, mais il ne le fait pas en aussi peu de tems; les fibres de l'Amandier plus souples que celles du Prunier, peut-être entrelassées d'un plus grand nombre de trachées, remplies d'une sève plus éthérée, plus élastique, sont plus sensibles aux changemens de l'Atmosphere, entrent plus aisément en jeu, & par cette raison poussent de meilleure heure au Printems. En un mot, l'Amandier croît plus vîte que le Prunier

Si

Si les branches dépenſent donc plus de ſève que le tronc n'en peut fournir, elles le ſucent néceſſairement, elles l'affament, & l'empêchent par-là de prendre de la groſſeur.

Il n'eſt pas ſurprenant que la Greffe ait ſi bien pouſſé la premiere année, c'eſt que le Prunier étoit en état de ſuffire à la nourriture d'une jeune branche; mais ſi-tôt qu'elle aura pris une certaine groſſeur, il faut néceſſairement que le ſujet périſſe.

Nous avons remarqué que ces Arbres périſſoient plutôt au Printems qu'en toute autre ſaiſon, ce qui eſt une ſuite néceſſaire de ce que nous venons de dire: car l'Amandier, prenant ſon jeu de reſſort au Printems plutôt que le Prunier, il le ſuce, pour ainſi dire, dans le tems que déja exténué & encore en repos, il n'étoit pas en état de lui fournir de la ſève; ce qui acheve de le faire périr.

Cette cauſe, qui eſt plus conſiderable au Printems qu'en toute autre ſaiſon, ſubſiſtera cependant toute l'année, ſi (comme je l'ai prouvé dans un Mémoire que j'ai lu l'année derniere à l'Académie) la condenſation & la raréfaction ſucceſſive de l'air ſont les premiers principes du mouvement de la ſève.

J'ai remarqué encore, que les Arbres que j'avois fait lever pour mettre en place, étoient morts avant ceux qu'on avoit laiſſés dans la Pépiniere: ce qui vient ſans doute de ce qu'un Arbre tranſplanté n'eſt jamais ſi abondant en ſève, que celui dont les racines n'ont point changé de ſituation.

Avant de quitter cette Greffe, il eſt bon d'obſerver que j'ai fait cette Expérience ſur des

des Pruniers en plein vent & dans une terre plus seche qu'humide, car si l'on n'avoit pas égard à ces circonstances, il pourroit bien arriver de la difference dans la réussite.

Si les Greffes des Amandiers sur Pruniers ont péri, nous allons voir que le Prunier sur l'Amandier a eu le même sort. Une conformité si exacte d'effets engage à admettre aussi de la conformité dans les causes: aussi s'y rencontre-t-elle, & quoique l'une de ces Greffes soit périe d'inanition, & l'autre d'une surabondance de substance, elles se réunissent, comme nous allons le voir, en ce que la disproportion d'élasticité, de souplesse, de ressorts dans les fibres, ou dans les liqueurs, a produit deux effets si contraires.

Le Frere Philippe, habile dans l'art du Jardinage, & qui a la direction des Pépinieres des RR. PP. Chartreux, fit greffer en couronne le Prunier sur l'Amandier: les Greffes pousserent d'abord à merveille, mais ensuite la gomme s'étant mise au-lieu de l'insertion, elle les fit périr.

Cette seule Observation découvre la cause de la perte de ces Greffes: l'Amandier qui pousse plus vîte que le Prunier, & qui entre plus aisément en jeu, charrie à la Greffe, qui est encore presque sans action, une grande quantité de sève, & beaucoup plus que la Greffe n'en peut dépenser, ce qui occasionne un dépôt de sève dans l'endroit de l'insertion, l'humidité s'en évapore, cette sève s'y épaissit, & forme la gomme qui successivement obstrue les vaisseaux, ferme les pas-

ſages aux liqueurs, d'où s'enſuit la ſechereſſe & la perte de la Greffe.

Ainſi après avoir vu, dans la premiere Expérience, l'Amandier, qui demande à ſon ſujet plus de ſève qu'il ne lui en peut fournir, périr d'inanition; nous voyons dans cette expérience le Prunier, qui ne dépenſe pas tant de ſève que lui en fournit l'Amandier, périr, pour ainſi dire, de réplétion & d'engorgement.

C'eſt ici le lieu de rendre raiſon d'une autre ſingularité que j'ai remarquée dans le travail que j'ai fait ſur la Greffe, puiſque ſans ſortir de ces principes, & par cette même diſproportion de ſève entre la Greffe & le ſujet, on découvre comment certaines Greffes périſſent ſans que le ſujet en pâtiſſe, pendant que d'autres ſemblent ne périr que par la mort du ſujet.

Dans le premier cas, il ne paroît pas ſurprenant qu'une Greffe, qui ne trouve point dans un ſujet la quantité ou la qualité de ſève qui lui convient, périſſe; rien n'eſt plus naturel: l'Arbre ſur lequel elle eſt appliquée, la regarde comme une branche inutile, il ne lui envoye plus de ſubſtance, mais il ſe forme de nouveaux jets auxquels il fournit de la ſève en abondance.

Le contraire arrive cependant, & l'on voit des ſujets périr en même tems, ſouvent même avant leurs Greffes, parce qu'ils ne leur fourniſſoient pas aſſez de ſève, & quelquefois parce qu'ils lui en fourniſſoient trop.

Les Greffes de l'Amandier ſur le Prunier,

&

& du Prunier sur l'Amandier, que je viens de donner pour exemples, paroissent seules servir à établir ces deux observations ; j'y ajouterai cependant, pour me servir d'exemples connus de tout le monde, ceux de la Greffe du Poirier sur le Coignassier, & du Pommier sur le Paradis, pratiquées dans une terre seche & légere ; car quoique dans ces sortes de terres ces dernieres Greffes durent quelque tems, & ne périssent pas si promptement que celles de l'Amandier sur le Prunier, cependant les sujets ne prennent presque point de corps, ne poussent que peu en racines, la Greffe jaunit, & j'ai presque toujours remarqué que sa mort est bientôt suivie de celle du sujet.

Nous ne pouvons pas, à la vérité, soupçonner, comme nous avons fait à l'égard de l'Amandier & du Prunier, une grande difference entre l'élasticité des fibres & des liqueurs de ces Arbres, puisqu'ils poussent à peu près d'aussi bonne heure au Printems : mais nous reconnoissons bien clairement que le Poirier dépense plus de séve que le Coignassier ne lui en peut fournir, ce qui arrive aussi aux differentes especes de Pommiers, à l'égard de celui de Paradis, puisque les Greffes formoient un gros bourlet à l'endroit de l'insertion, tandis que les sujets ne prenoient presque point de corps, & que les jeunes branches & les feuilles jaunissoient pendant que les racines ne faisoient aucun progrès.

Mais ce qu'il est bon d'observer encore, est que ces Arbres réussissent fort bien, &

durent assez longtems dans les terres grasses, parce que les sujets sont plus en état de fournir à la Greffe le suc qu'elle demande.

Il est donc constant, par les Expériences que je viens de rapporter, que les sujets qui ne sont pas en état de fournir à la Greffe la sève qu'elle leur demande, périssent faute de substance.

Mais il peut aussi se faire, & il est même probable que céla est, qu'il y aura des sujets qui périront par une abondance de sève peu proportionnée à la capacité des branches, car alors il est nécessaire que la sève surabondante soit, ou reportée aux racines selon le systême de la circulation, ou que dans le systême opposé elle reste dans les vaisseaux sans mouvement; or dans l'un & dans l'autre cas il est nécessaire que la Greffe en pâtisse, plus à la vérité dans celui-ci, parce que cette stase, ce repos, emporte nécessairement la corruption. Mais dans le systême de la circulation, le reflux vers les racines étant considerablement augmenté, on conçoit, sans qu'il soit nécessaire que je l'explique, que l'Arbre en doit beaucoup souffrir; de-là peut-être ces galles, ces gourmes, ces chancres & ces écoulemens de substance qui arrivent quelquefois aux Arbres greffés, mais presque toujours aux Arbres qu'on étête, comme les Ormes, les Peupliers & les Saules, qui ne manquent gueres au bout d'un tems de tomber en pourriture.

Que d'accord, que de convenance il faudroit entre la Greffe & le sujet, pour qu'elle réussît parfaitement. Qu'il est rare de le trou-

trouver, cet accord! Je ne sai même si en le cherchant avec beaucoup de peine, nous pouvons esperer de le trouver : aussi ne faut-il pas s'étonner s'il y a si peu de Greffes qui réussissent dans cette perfection. Il y en a qui refusent entierement de reprendre, d'autres périssent peu de tems après, mais généralement tous les Arbres greffés ne durent pas, à beaucoup près, si longtems que s'ils ne l'étoient pas.

On ne voit gueres périr de vieillesse un Coignassier, même dans les terres assez seches: cependant dans ces sortes de terres, lorsqu'on greffe dessus un Poirier, il ne dure pas longtems. Je pourrois dire la même chose du Prunier, lorsqu'on le greffe dessus un Pêcher, ou lorsqu'on le laisse sans être greffé: il n'y a que le Poirier greffé sur son Sauvageon, l'Orme femelle sur l'Orme mâle, & d'autres Greffes pareilles, qui durent ordinairement très longtems. Mais malgré cette raison de convenance entre ces sortes de Greffes & leurs sujets, la durée de celles-là n'égalera jamais celle du Sauvageon-Poirier, ou de l'Orme mâle, lorsqu'ils ne sont point greffés; cependant j'ai dit qu'il y avoit quelques Arbres qui m'avoient paru durer plus longtems étant greffés, que ne l'étant pas. Lorsque j'aurai rapporté l'Expérience qui a donné lieu à cette observation, on sera en état de juger si ces Greffes ont quelque chose de singulier qui mérite faire une exception de la règle générale.

Il y a bien dix-huit ans que nous avons fait greffer dans une terre grasse & auprès de

de terre, des Pruniers de la Reine Claude sur des Pêchers de Noyau: ces Greffes n'ont pas beaucoup poussé en bois, mais elles ont donné de bon fruit, & subsistent encore assez bien à leur maniere, c'est-à-dire, dans leur état languissant, pour esperer qu'elles dureront encore du tems; cependant c'est un fait, que le Pêcher de Noyau ne dure pas si longtems, & je crois qu'ils seroient péris, s'ils n'avoient pas été greffés.

Pour comprendre le secours que le Pêcher a pu recevoir du Prunier, il faut savoir que le Pêcher est fort délicat, qu'il pousse avec une vivacité extrême, qu'il produit beaucoup plus de branches qu'il n'en peut nourrir, ce qui fait qu'il est presque toujours plein de bois mort, qu'il perd souvent quelques-unes de ses grosses branches, quelquefois même le tronc meurt, & il repousse quelques foibles jets du pied, ce qui oblige presque toujours à l'arracher, parce que ces sortes de rejets ne sont pas bons à grand' chose; aussi le plante-t-on en espalier à cause de la délicatesse de son bois, qui veut être mis à couvert des injures du tems; c'est aussi dans cette même vue qu'on lui retranche beaucoup de bois par les differentes tailles qu'on lui fait, afin de le mettre plus en état de nourrir les branches qu'on lui laisse.

Ce sont à peu près les mêmes avantages qu'il retire de la Greffe du Prunier: à ses branches délicates on en substitue de robustes, & on n'a pas besoin de lui retrancher de son bois, puisque le Prunier ne pousse qu'autant qu'il en peut nourrir; mais le Pru-

nier

nier fait un plus grand Arbre que le Pêcher, c'est aussi pour cela que nos Greffes ont donné si peu de bois, & elles seroient, je crois, péries, si les sujets n'avoient pas été dans une terre très grasse & fertile; de plus, les fibres du Pêcher sont un peu plus souples que celles du Prunier, la sève de celui-là est plus éthérée, plus élastique, & c'est peut-être pour cette raison que nos Arbres sont jaunes & languissans.

Malgré ce que je viens de dire de la Greffe du Prunier sur le Pêcher, je crois qu'on doit regarder comme une règle générale, que les Arbres greffés ne durent pas si longtems que ceux qui ne le sont pas, & que le plus ou le moins de durée qu'on peut remarquer entre les Arbres greffés, dépend du plus ou moins de rapport qui se rencontre entre la Greffe & le sujet.

Enfin j'ai dit avoir remarqué certains Arbres qui duroient plus longtems greffés sur des sujets, qui de leur nature ne durent que peu d'années, que l'étant sur d'autres qui sont plus robustes & durent plus longtems. La Greffe du Pêcher nain sur le Pêcher de Noyau, ou sur Prunier, m'a donné occasion de faire cette observation; car quoique le Prunier vive plus longtems que le Pêcher de Noyau, cependant le Pêcher nain dure plus longtems sur le Pêcher de Noyau que sur le Prunier: ce qui est encore un effet bien sensible de l'analogie dont dépend la réussite des Greffes.

Mais voici encore une Expérience qui découvre bien l'effet de ces rapports: nous la

devons au Frere Philippe, Chartreux, & elle subsiste encore à Moulinot, Maison de Campagne de son Ordre.

On y voit un Poirier, sur lequel on a appliqué une Greffe de Poirier & une de Pommier. Toutes deux portent du fruit, mais la Greffe de Pommier est chétive & petite, aulieu que celle de Poirier, qui se trouve sur son sujet, est forte & vigoureuse. On voit au contraire dans le même endroit un Poirier greffé sur Pommier. Ce Poirier donne du fruit, & est assez beau, quoiqu'il ne soit pas si vigoureux que sur son Sauvageon. J'ai fait exécuter l'une & l'autre Greffe dans mon Jardin, mais ce sont de jeunes Greffes, les Arbres sont petits, & ainsi ne peuvent pas encore nous servir à porter un jugement aussi assuré que ceux de Moulinot, qui sont en plein rapport.

Si cette recherche est utile à la Physique, par le détail où l'on est entré des effets que produisent l'analogie & les rapports qui se trouvent entre les Arbres & les explications que l'on a données de quantité de phénomenes qui appartiennent à la Greffe, l'Agriculture en peut aussi tirer de grands avantages, puisqu'elle peut servir à détromper de quantité de faits rapportés dans les Ouvrages d'Agriculture, & qu'on reconnoitra que la plupart des Greffes qu'on nous y propose ne peuvent réussir, & que celles qui reprennent, ne produisent point les effets qu'on nous en fait esperer, puisque, comme nous l'avons vu, les especes se conservent, quoique greffées sur des sujets de nature bien differente,

com-

comme le Poirier sur l'Epine, & le Prunier sur le Pêcher.

Pour faire encore plus d'usage de cette théorie, pour l'avantage de la pratique, nous pourrions faire sentir, par exemple, qu'il est quelquefois utile que l'analogie ne se trouve pas dans toute sa perfection. Mais cette réflexion & bien d'autres nous meneroient trop loin, pour peu qu'on voulût entrer dans le détail à proportion de leur utilité; ainsi je les réserve pour un autre Mémoire.

SECONDE PARTIE DE L'EXAMEN DE LA POUSSÉE DES VOUTES.

Par M. COUPLET. *

J'AI donné à l'Académie en 1729 la premiere Partie de l'Examen de la Poussée des Voûtes, dans laquelle, en considerant les Voussoirs comme polis, je déterminois la forme & la poussée des Voûtes, avec l'épaisseur de leurs pied-droits, & la charge que les Cintres de Charpente souffrent dans la construction des Voûtes uniformes.

Dans

* 15. Mars 1730.

Dans cette hypothese des Voussoirs polis, on est obligé de donner aux Voûtes beaucoup d'épaisseur dans leurs reins, pour qu'elles en ayent une suffisante au sommet, & qu'elles ayent la forme qui leur est nécessaire pour que leurs Voussoirs fassent équilibre entre eux, ce qui fait que les pied-droits doivent avoir une épaisseur considerable.

Comme dans le Coroll. 3. du Théor. 2. de la premiere Partie, j'ai remarqué que les Voûtes se soutiennent sans qu'on leur donne la forme nécessaire à l'équilibre de leurs Voussoirs, considerés comme polis, j'ai promis de donner une seconde Partie de l'examen des Voûtes, dans laquelle je considererois les Voussoirs comme grenus, & assez liés ensemble, ou assez adhérens, pour ne point glisser les uns contre les autres.

Deux raisons m'ont engagé à considerer dans la premiere Partie les Voussoirs comme polis; la premiere, parce que tous ceux qui ont traité de la poussée des Voûtes, les ont regardé comme tels: & la seconde, pour faire voir la difference qu'il y a entre la poussée des Voûtes dont on regarde les Voussoirs comme polis, & la poussée de celles dont on regarde les Voussoirs comme grenus, & assez adhérens, ou liés ensemble, pour ne pouvoir point glisser les uns sur les autres.

Quand je dis que je considere les Voussoirs comme assez liés pour ne pouvoir point glisser l'un sur l'autre, je ne prétends pas pour cela les considerer dans la Voûte comme ne faisant tous ensemble qu'une seule piece, ou un seul corps: j'entends seule-

ment,

ment, par cette liaison, que les faces des Voussoirs qui se toucheront, seront assez embarrassées par l'engrenement de leurs parties, pour ne point glisser les unes contre les autres, & que cette liaison ne s'opposera point à l'écartement des Voussoirs dans la rupture de la Voûte, ensorte que ces Voussoirs pourront être écartés l'un de l'autre par toutes forces où il n'y aura point de frottement de leurs faces l'une contre l'autre.

C'est suivant cette nouvelle hypothese que j'ai résolu les Problêmes qui composent cette suite, ou seconde Partie de la Poussée des Voûtes.

Dans le premier Problême & ses Corollaires, je détermine la moindre épaisseur uniforme que l'on puisse donner à une Voûte circulaire de 180°.

Dans le second Problême je détermine la plus petite épaisseur uniforme d'une Voûte circulaire de 120°.

Dans le troisieme Problême je détermine la poussée horizontale d'une Voûte, dont l'intrados & l'extrados sont circulaires.

Dans le quatrieme Problême je détermine la base du pied-droit, telle que l'effort composé de la pesanteur de la Voûte, de sa poussée horizontale & de la pesanteur dudit pied-droit, soit dirigé vers un point donné quelconque de ladite base.

Enfin les formules que j'ai déduites dans la Solution de ces Problêmes, & les moyens dont je me suis servi pour les résoudre, pourront facilement être employés pour déterminer les moindres épaisseurs que l'on

puiſſe donner à une Voûte circulaire & uniforme pour un Arc circulaire quelconque ; comme auſſi pour déterminer les épaiſſeurs néceſſaires aux pied-droits, ſuivant leur hauteur quelconque, pour réſiſter à la pouſſée des Voûtes dont ils ſeroient chargés.

THEOREME.

Si l'on ſuppoſe que les Vouſſoirs ne puiſſent point gliſſer les uns contre les autres, la Voûte ne caſſera point, ſi la corde de la moitié de l'extrados ne coupe point l'intrados, mais qu'elle ſe trouve dans l'épaiſſeur de la Voûte.

DEMONSTRATION.

* Soit une Voûte *BMANC*, ſi la corde *AB* de ſa moitié *BMA* ne coupe point l'intrados *IKL*; je dis que la Voûte ne caſſera point: car quelle que ſoit la charge du ſommet *A* de cette Voûte, elle ſe communiquera directement & ſans interruption au Couſſinet *B*, ſuivant la ligne droite *AFB* qui ſe trouve dans l'épaiſſeur de la Voûte.

Car pour que la Voûte s'écraſât, il faudroit que l'angle *BAC* s'ouvrît, & par conſéquent que les Couſſinets *B* & *C* s'écartaſſent ; ce qui ne peût point être, puiſque nous les regardons comme des obſtacles invincibles.

Donc la Voûte ne caſſera point, ſi la corde de la moitié de l'extrados ne coupe point l'intrados. *Ce qu'il falloit démontrer.*

RE-

* Fig. N

REMARQUE.

Si la corde *AB* de la demi-Voûte coupoit l'intrados *ODEP*, il arriveroit que si le sommet *A* étoit trop chargé, l'angle *DAE* pourroit s'ouvrir, & par conséquent les angles *ADB*, *AEC*, pourroient se fermer, si les parties *BMDO*, *CNEP*, de la Voûte n'étoient pas suffisantes pour résister à l'ouverture qu'elles seroient forcées de faire.

Mais si l'on remplit de Maçonnerie la partie *AMBQ*, suivant la ligne horizontale *AQ*, cette charge, toute grande qu'elle est, qui fait perdre entierement l'équilibre qui étoit observé précédemment dans tous les Voussoirs, n'occasionnera cependant point la rupture de la Voûte, puisque nous avons supposé que la Clef *A* ne peut point glisser; & aussi ces constructions se pratiquent-elles dans les Salons voûtés, ou Berceaux de Terrasses, avec tout le succès que l'on peut desirer.

Lorsqu'on ne remplit point les reins de la Voûte, ce qui arrive dans les Edifices publics très exhaussés, comme les Eglises, où l'on craint que la poussée ne soit trop grande contre les pied-droits, la partie supérieure de la Voûte tend toujours à baisser plutôt que les parties les plus proches des Coussinets, ce qui fait souvent rompre la Voûte.

Or l'on voit que ces Voûtes rompues, dont on n'a que trop d'exemples, manquent toujours à peu près à distances égales du Coussinet & du sommet; d'où l'on peut conclurre

que cet endroit est le plus foible de la Voûte.

Il faut donc, suivant cette remarque, donner à la Voûte une épaisseur telle que cet endroit par lequel la Voûte manque presque toujours, ait une force suffisante pour se soutenir, & empêcher la Voûte de changer de courbure : c'est pourquoi nous allons chercher dans le Problême suivant quelle est l'épaisseur qu'il faut donner à cet endroit le plus foible, je veux dire à l'endroit également distant du Coussinet & du sommet, pour que la Voûte se soutienne dans sa premiere courbure, autant qu'il est possible qu'elle s'y soutienne ; je dis autant qu'il est possible, car il est constant que quand on décintre une Voûte ou une Plate-bande, elle se surbaisse de plusieurs pouces, sans que pour cela les Voussoirs ou Clavaux glissent les uns sur les autres, parce que pour-lors ils ne font que se serrer plus étroitement sur leurs joints.

PROBLEME I.

Trouver la moindre épaisseur que l'on puisse donner à une Voûte circulaire de 180°, *c'est-à-dire, d'un demi Cercle entier, dont on suppose l'épaisseur uniforme.*

SOLUTION.

* Soit une Voûte circulaire *RAF*, dont l'intrados *SBE* & l'extrados *RAF* soient des de-

* Fig. 2.

demi-Cercles concentriques : il s'agit de déterminer la moindre épaisseur *AB* qu'on lui puisse donner.

Pour cela je suppose que la Voûte est composée de quatre Voussoirs égaux, attachés ensemble, comme par des charnieres, aux points *A*, *T*, *K*, & aux Coussinets par les charnieres *F*, *R*.

Cela posé, il est évident que les Voussoirs *AK*, *AT*, feront effort par leur pesanteur pour s'ouvrir sur la charniere *A*, & pour se fermer sur les charnieres *K*, *T*, & par conséquent pour écarter les Voussoirs *KF*, *TR*, en les faisant tourner sur les charnieres *F*, *R*, par lesquelles ils tiennent aux Coussinets ; & que les Voussoirs *KF*, *TR*, feront par leur poids effort pour tourner à contre-sens sur les mêmes charnieres *F*, *R*, & par conséquent pour résister aux Voussoirs *AK*, *AT*, qui font effort pour les renverser. Voyons maintenant quels sont ces efforts.

Le Voussoir *AK*, dont la pesanteur est réunie à son centre de gravité *H*, laquelle j'exprime par la diagonale *GI*, du parallelogramme *OK*, fera en même tems deux efforts ; l'un exprimé par *GO*, pour résister à la poussée du Voussoir *AT*, qui fait un effort semblable, & l'autre exprimé par *GK*, pour pousser contre le Voussoir *KF*. Mais cet effort *GK* se décompose aussi en deux autres efforts, dont l'un est horizontal, exprimé par *IK*, & l'autre vertical, exprimé par *XK*, ensorte que ces deux efforts font des effets opposés, puisque l'effort horizontal *IK* tend à renverser le Voussoir *KF*, en le

faifant tourner fur la charniere F, & que l'effort vertical XK tend à affermir ce même Vouffoir KF, en le faifant tourner à contre-fens fur la même charniere F: ainfi l'excès de l'énergie de l'effort horizontal IK, fur l'énergie de l'effort vertical XK, fera l'énergie qui refte au Vouffoir AK, pour renverfer le Vouffoir KF fur la charniere F.

Il faut donc faire l'épaiffeur de la Voûte telle que cet excès foit égal à l'énergie que le Vouffoir KF a pour tourner du côté du centre de la Voûte, puifqu'il faut que le Vouffoir KF réfifte à la pouffée du Vouffoir AK.

Pour cela foit l'épaiffeur AB de la Voûte. . . . . $= x$.

Le rayon BC de l'intrados $= KC$ $= CE$. . . . . $= r$.

Le rayon AC de l'extrados fera . . . . $= r + x$.

Soit l'arc BK, ou fon égal KE. . . $= a$.

Soit BZ, ou fon égal LE. . . . . . $= d$.

L'on aura CZ ou fon égal $CL = ZK$. . . $= r - d$.

Du centre de gravité H du Vouffoir AK, foit tiré HD perpendiculairement fur AC, & du centre de gravité P de l'autre Vouffoir FK foit tiré PQ, perpendiculaire fur CF: pour-lors, puifque les Vouffoirs font égaux,

L'on aura $CD = CQ$, & par la proprieté des centres de gravité, l'on aura HD, ou fon égal $ZI = \frac{6drr + 6drx + 2dxx}{6ar + 3ax}$.

Mais pour faciliter le calcul, foit fait HD, ou $ZI = z$: puifque $CZ = ZK$, & que le triangle CZK eft rectangle:

L'on

L'on aura CZ, ou $ZK = \sqrt{\frac{CK^2}{2}} = \sqrt{\frac{rr}{2}}$; ou plutôt, comme nous avons fait $BZ = d$, nous aurons CZ, ou son égal $ZK = r - d$.

Et par conséquent $IK = ZK - ZI = r - d - z$.

Et l'on aura GI, ou $XK = AZ = x + d$.

Mais l'effort horizontal $IK = r - d - z$ du Voussoir AK est appliqué au bras de levier $MF = CZ = r - d$, ainsi l'énergie de cet effort horizontal IK, pour faire tourner le Voussoir KF sur la charniere F, est $= rr - 2rd + dd + dz - rz$.

Et en la place de $rr - 2rd + dd$, qui est le quarré de $r - d = ZK$, si l'on met $\frac{rr}{2}$, qui est aussi le quarré de ZK, puisque nous avons trouvé ci-dessus $ZK = \sqrt{\frac{rr}{2}}$; l'on aura l'énergie de la force horizontale $IK = \frac{rr}{2} + dz - rz$.

Et la force verticale $XK = d + x$ est appliquée au bras de levier $LF = d + x$, ainsi son énergie, pour affermir le Voussoir KF, est $= dd + 2dx + xx$.

Et si l'on retranche, comme nous avons dit ci-devant, l'énergie verticale $dd + 2dx + xx$ du Voussoir AK, de son énergie horizontale $\frac{rr}{2} + dz - rz$, le reste $\frac{rr}{2} + dz - rz - dd - 2dx - xx$ sera l'énergie qui reste au Voussoir AK, pour renverser le Voussoir KF autour de la charniere F.

Voyons

Voyons maintenant quelle eſt l'énergie du Vouſſoir KF pour réſiſter.

Puiſque le Vouſſoir KF eſt égal au Vouſſoir AK, ſa peſanteur ſera comme celle du Vouſſoir $AK = d + x$.

Mais cette peſanteur $d + x$ étant réunie au centre de gravité P, eſt appliquée au bras de levier $QF = AD$, ainſi ſon énergie ſera $= \overline{d + x} \times AD$.

Maintenant pour trouver le levier $QF = AD$, il faut conſiderer que CH diviſant l'angle ACK ou ZCK en deux parties égales, l'on aura . . . . $CK : CZ :: KV : VZ$.
Et *componendo* ... $CK + CZ : CZ :: KV + VZ : VZ$.
C'eſt-à-dire . . . . $2r - d : r - d :: r - d : VZ$.

$$\text{Donc } VZ = \frac{\overline{r-d} \times \overline{r-d}}{2r-d}.$$

$$\text{Mais } VZ : CZ :: HD : CD.$$

$$\text{C'eſt-à-dire, } \frac{\overline{r-d} \times \overline{r-d}}{2r-d} : r-d :: z : CD$$

$$= \frac{2rz - dr}{r-d}.$$

Mais AD ou le levier $QF = AC - CD$ $= r + x - \frac{2rz + dz}{r-d}$.

Donc l'énergie $\overline{d + x} \times AD$, que nous avons trouvée pour le Vouſſoir KF, eſt

$\overline{d+x} \times \overline{r+x} + \overline{d+x} \times -\frac{2rz+dz}{r-d}$, c'eſt-à-dire, $dr + dx + xr + xx - \frac{2drz + ddz - 2rzx + dzx}{r-d}$, laquelle énergie

du

du Vouſſoir *K F* doit être égale à l'énergie $\frac{rr}{2} + dz - rz - dd - 2dx - xx$ qui reſte au Vouſſoir *AK* pour le renverſer ſur la charniere *F*, ce qui donne cette Equation, $dr + dx + xr + xx - \frac{2drz + ddz - 2rzx + dzx}{r - d} = \frac{rr}{2} + dz - rz - dd - 2dx - xx$ (*A*).

Comme nous avons trouvé $\frac{rr}{2} = rr - 2dr + dd$.

L'on aura $\frac{r}{\sqrt{2}} = r - d$.

Et par conſéquent l'on aura $d = r - \frac{r}{\sqrt{2}}$.

Mettant $\frac{6drr + 6drx + 2dxx}{6ar + 3ax}$ en la place de z:

Et $r - \frac{r}{\sqrt{2}}$ en la place de d dans l'Equation (*A*):

Elle ſe changera en cette Equation ordonnée

$$\frac{x^3 + x^2 \times \left\{ \begin{array}{l} -3rr \\ -\frac{9}{2}ar \\ +12ra\sqrt{2} \end{array} \right\} + xx \left\{ \begin{array}{l} -3r^3 \\ -\frac{27}{2}arr \\ +15arr\sqrt{2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} -9ar^3 \\ +6ar^3\sqrt{2} \end{array}}{8a\sqrt{2} - r} = 0.$$

Main-

Maintenant si l'on fait le rayon BC ou r de la Voûte . . . . $= 14.$

Et que l'on multiplie ce rayon par $3\frac{1}{7}$, qui est à peu près le nombre de fois que la circonference contient son diametre, l'on aura la demi-circonfer. . . . $= 44.$

Et l'arc BK ou a, qui est $\frac{1}{4}$ de la demi-circonference, sera . . . . $= 11.$

Et $\sqrt{2}$ étant $= 1\,\frac{41421}{100000}$, l'Equation se changera en celle-ci, $x^3 + 40.787xx + 257.05x - 475.587$ . . . . $= 0.$

Mettant $y - \frac{40.787}{3}$ en la place de x, l'on aura cette Equation, qui n'aura point de second terme,

$$y^3 . * - 297.473y + 1043.38018 = 0.$$

Or comme $\frac{\overline{297.473}^3}{27} > \frac{\overline{1043.38018}^2}{4}$, & que le troisieme terme est négatif, il s'ensuit que cette Equation est irréductible, & l'on trouvera par approximation la valeur positive de x, qui est celle que nous cherchons, entre 1.4866 & 1.4865, qui est la plus petite épaisseur d'une Voûte uniforme en plein Cintre, c'est-à-dire, en demi-cercle, dont le diametre porteroit sur les Coussinets, & seroit, comme nous l'avons supposé, de 28 pieds dans l'intrados.

Co-

COROLLAIRE.

* Si l'on vouloit que l'effort GK du Voussoir AK fût dirigé vers la charniere F sur le Coussinet, pour-lors la pesanteur du Voussoir AK ne pourroit jamais renverser le Voussoir KF, parce que ce Voussoir KF trouveroit sur la charniere F un obstacle invincible.

Et dans ce cas l'épaisseur de la Voûte seroit telle, que l'on auroit cette proportion $GI : IK :: KL : LF$, puisque l'on suppose que la direction GK passe par le point F, & que les triangles GIK, KLF, sont semblables.

Mais dans le Problême précédent nous avons trouvé $GI = d + x$ aussi-bien que LF, & nous avons trouvé $IK = r - d - z$ & $KL = r - d$.

L'on aura donc cette proportion $d + x : r - d - z :: r - d : d + x$. Donc $dd + 2dx + xx = rr - 2dr + dd - rz + dz$.

Mettant en la place de z sa valeur, que nous avons trouvée, Problême précédent, $= \frac{6drr + 6drx + 2dxx}{6ar + 3ax}$, & mettant aussi en la place de d sa valeur, que nous avons aussi trouvée dans le même Problême $= r - \frac{r}{\sqrt{2}}$, l'on aura, en ordonnant l'Equation,

* Fig. 2.

$$\frac{x^3 + ax \times \left\{ \begin{array}{l} 12ar \\ -rr \\ -3ar\sqrt{2} \\ +rr\sqrt{2} \end{array} \right\} + xx \left\{ \begin{array}{l} 15arr \\ -3r^3 \\ -9arr\sqrt{2} \\ +3r^3\sqrt{2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3r^4 \\ +6ar^3 \\ -6ar^3\sqrt{2} \\ +3r^4\sqrt{2} \end{array}}{3a} = 0.$$

Mettant, comme dans le Problême précédent, 11, 14, 1. $\frac{41421}{100000}$ en la place de a, r, $\sqrt{2}$, l'on aura $x^3 + xx \times 38.661 + x \times 251.771 - 826.6125 = 0$.

Et l'on trouvera, par approximation, la valeur positive de x entre 2.3678 & 2.3688 pour la moindre épaisseur uniforme que l'on puisse donner à la Voûte de 28 pieds de diametre, afin que l'effort GK de la moitié AK de la demi-Voûte soit dirigé vers la charniere F du Coussinet.

PROBLEME II.

Déterminer la plus petite épaisseur uniforme AB *d'une Voûte* RAF *de* 120°.

SOLUTION.

Soit, comme dans le Problême précédent, la Voûte (*Fig.* 3.) RAF, divisée

en quatre Voussoirs égaux attachés ensemble par trois charnieres T, A, K, & aux Coussinets par deux charnieres R, F.

Cela posé, soient les arcs de l'intrados BK, KE, &c..... $= a$.

Soit le rayon BC de l'intrados $= r$.

L'épaisseur AB de la Voûte... $= x$.

L'on aura le rayon AC de l'extrados. .... $= r + x$.

L'on aura ZK, ou son égal EV, qui est le sinus de 30°.... $= \frac{r}{2}$.

L'on aura ZC .... $= \sqrt{\frac{3rr}{4}}$.

Et l'on aura BZ........ $= r - \sqrt{\frac{3rr}{4}}$.

Ou, si l'on veut, soit, comme dans le Problême précédent, BZ.............. $= d$.

L'on aura $AZ = d + x = BZ + AB = r - \sqrt{\frac{3rr}{4}} + x$.

Soit H le centre de gravité du Voussoir AK, l'on aura par la proprieté des centres de gravité, HD, ou AG, ou $ZI = \frac{6drr + 6drx + 2dxx}{6ar + 3ax}$, comme dans le Problême précédent. Et par conséquent $IK = ZK - ZI = \frac{r}{2} - \frac{6drr - 6drx - 2dxx}{6ar + 3ax}$.

Mais la pesanteur du Voussoir AK, étant réu-

réunie à son centre de gravité H, & agissant verticalement suivant la diagonale GI du parallelogramme YK, se décompose en deux autres forces, dont l'une agit suivant le côté GY du parallelogramme YK, & l'autre suivant le côté GK du même parallelogr. ensorte que si l'on exprime la pesanteur du Voussoir AK par la diagonale $GI = d + x$, l'effort que ce Voussoir fera suivant GK contre le Voussoir KF, sera exprimé par GK.

Mais cet effort exprimé par GK, que le Voussoir AK fait contre le Voussoir KF, se décompose en deux forces suivant l'horizontale IK, exprimé par $IK = \frac{r}{2} - \frac{6drr - 6drx - 2dxx}{6ar + 3ax}$, & l'autre suivant la verticale XK, exprimé par XK, ou par la pesanteur GI du Voussoir $= x + d$.

Ainsi le Voussoir AK fait contre le Voussoir KF deux efforts contraires, c'est-à-dire, l'un horizontal IK, pour le renverser sur la charniere F, & l'autre XK, pour l'affermir.

Donc l'excès de l'energie de l'effort horizontal IK sur l'énergie de l'effort vertical XK, sera l'énergie qui reste au Voussoir AK, pour renverser le Voussoir KF, en le faisant tourner sur la charniere F.

Ainsi il faut faire l'épaisseur x de la Voûte telle que cet excès d'énergie soit égal à l'énergie que le Voussoir KF a pour tourner vers le centre de la Voûte, ou pour résister au Voussoir AK.

Si l'on multiplie l'effort horizontal $IK = \frac{r}{2}$ —

$-\frac{6drr - 6drx - 2dxx}{6ar + 3ax}$ par son bras de levier $MP = MN - PN = \sqrt{\frac{3rr}{4}} - \frac{r-x}{2}$ (parce que PN étant le sinus de 30°, vaut la moitié du rayon $FC = r + x$).

Le produit $\frac{rr}{4}\sqrt{3} - \frac{9dr^3\sqrt{3} - 3drrx\sqrt{3} - drxx\sqrt{3}}{6ar + 3ax}$

$-\frac{rr}{4} + \frac{3dr^3 + 3drrx + idrxx}{6ar + 3ax} - \frac{rx}{4}$

$+\frac{3drrx + 3drxx + dx^3}{6ar + 3ax}$ sera l'énergie horizontale du Voussoir AK.

Maintenant si l'on multiplie l'effort vertical $XK = x + d$ par son bras de levier $LF = \rho F - \rho L$, l'on aura l'énergie de l'effort vertical.

Mais $F\rho$ étant le sinus de 60°, est égal $\sqrt{\frac{3}{4}CF^2}$, c'est-à-dire, $\frac{CF}{2}\sqrt{3} = \frac{r+x}{2}\sqrt{3}$, & nous avons trouvé $\rho L = ZK = \frac{r}{2}$. Donc le levier $LF = F\rho - \rho L = \frac{r+x}{2}\sqrt{3} - \frac{r}{2}$.

Multipliant, comme nous avons dit, ce levier par l'effort vertical $XK = x + d$, le produit $\frac{rx\sqrt{3}}{2} + \frac{xx\sqrt{3}}{2} + \frac{dr\sqrt{3}}{2} + \frac{dx\sqrt{3}}{2}$

$-\frac{rx}{2} - \frac{dr}{2}$ sera l'énergie de l'effort vertical.

Et si l'on retranche cette énergie verticale de

de l'énergie horizontale que nous avons trouvée, le reste

$$-\frac{3dr^3\sqrt{3}-3drrx\sqrt{3}-drxx\sqrt{3}+3dr^3+3drrx+drxx}{6ar+3ax}+\frac{3drrx+3drxx+dx^3}{6ar+3ax}$$

$$+\frac{rr\sqrt{3}-rr-rx}{4}-\frac{rx\sqrt{3}-xx\sqrt{3}-dr\sqrt{3}-dx\sqrt{3}+rx+dr}{2}$$ sera l'énergie

qui reste au Voussoir AK, pour renverser le Voussoir KF sur la charniere F de son Coussinet, lequel reste étant abregé, devient

$$=\frac{-3dr^3\sqrt{3}-3drrx\sqrt{3}-drxx\sqrt{3}+3dr^3+6drrx+4drxx+dx^3}{6ar+3ax}$$

$$+\frac{rr\sqrt{3}-rr+rx-2rx\sqrt{3}-2xx\sqrt{3}-2dr\sqrt{3}-2dx\sqrt{3}+2dr}{4}.$$

Lequel reste doit être égal à l'énergie du Voussoir KF, que nous allons chercher.

Comme le Voussoir KF est égal au Voussoir AK, sa pesanteur sera comme celle du Voussoir $AK=d+x$.

Mais cette pesanteur étant réunie au centre de gravité P du Voussoir KF, est appliquée au bras de levier QF, qu'il faut trouver.

Nous

Nous avons...... $OF = F\varrho - O\varrho$.

Mais nous avons trouvé...... $F\varrho = \frac{r+x}{2}\sqrt{3}$.

Il ne s'agit donc plus que de trouver............... $O\varrho$.

Pour cela il faut considerer que KS est la difference du sinus de 60° au sinus de 30°, puisque $KS = ZC - EV$, c'est-à-dire, $= \sqrt{\frac{3rr}{4}} - \frac{r}{2}$.

Mais pour abreger, soit fait $KS = b$, l'on aura, par la proprieté du centre de gravité, $P\pi$, ou son égal $O\varrho = \frac{6brr + 6brx + 2bxx}{6ar + 3ax}$.

Donc le levier $OF = F\varrho - O\varrho = \frac{r+x}{2}\sqrt{3} - \frac{6brr - 6brx - 2bxx}{6ar + 3ax}$.

Et multipliant ce levier par la pesanteur $d + x$ du Voussoir KF, le produit $\frac{dr\sqrt{3} + dx\sqrt{3} + rx\sqrt{3} + xx\sqrt{3}}{2} - \frac{6bdrr - 6bdrx - 2bdxx - 6brxx - 6brrx - 2bx^3}{6ar + 3ax}$ sera l'énergie du Voussoir KF, laquelle énergie doit être égale à l'énergie qui reste au Voussoir AK, pour renverser le Voussoir KF, ce qui donne cette Equation $\frac{dr\sqrt{3} + dx\sqrt{3} + rx\sqrt{3} + xx\sqrt{3}}{2} - \frac{6bdrr - 6bdrx - 2bdxx - 6brrx - 6brxx - 2bx^3}{6ar + 3ax}$

=

$$H = \frac{-3dr^3\sqrt{3} - 3drrx\sqrt{3} - drxx\sqrt{3} + 3dr^3 + 6drrx + 4drxx + dx^3}{6ar + 3ax}$$

$$+ \frac{rr\sqrt{3} - rr + rx - 2rx\sqrt{3} - 2xx\sqrt{3} - 2dr\sqrt{3} - 4dx\sqrt{3} + 2dx}{4}.$$

Mettant $r - \sqrt{\frac{3rr}{4}}$ en la place de d, & $\sqrt{\frac{3rr}{4}} - \frac{r}{2}$ en la place de b. Et ordonnant l'Equation, l'on aura

$$\frac{x^3 + xx \times \left\{ \begin{array}{l} 24ar\sqrt{3} \\ -3rr\sqrt{3} \\ -\frac{21}{2}ar \end{array} \right\} + x \times \left\{ \begin{array}{l} 30arr\sqrt{3} \\ -3r^3\sqrt{3} \\ -\frac{63}{2}arr \end{array} \right\} \begin{array}{l} +12ar^3\sqrt{3} \\ \\ -21ar^3 \end{array}}{6a\sqrt{3} - r\sqrt{3}} = 0.$$

Maintenant si l'on fait $r = 14$; a étant un arc de 30° sera $= 7\frac{1}{3}$, & substituant 14 & $7\frac{1}{3}$ en la place de r & a, dans cette Equation, l'on aura

$x^3. + 40.\ 227\,xx + 291.\ 5959\,x - 83.\ 416 = 0.$

D'où l'on tirera par approximation la valeur positive de x entr 0. 276 & 0. 275, qui est la moindre épaisseur uniforme que l'on puisse donner à une Voûte de 120 degrés. Ce qui donne x approché à $\frac{1}{1000}$ près.

R E-

REMARQUE.

Nous avons trouvé dans le Problême 1er, qu'une Voûte en plein Cintre, d'une épaisseur uniforme de 14 pieds de rayon, ou de 28 pieds de diametre, devoit avoir son épaisseur entre 1. 4866 & 1. 4865, pour être en équilibre & conserver sa figure.

Nous avons aussi trouvé dans le Problême 2, qu'une Voûte circulaire de 120°, d'une épaisseur uniforme, & de 14 pieds de rayon, devoit avoir une épaisseur entre 0. 276 & 0. 275, pour se soutenir en équilibre & ne point changer de figure.

Si l'on veut comparer l'épaisseur de la Voûte en plein Cintre avec la Voûte de 120°, il faut réduire ces Voûtes à une même largeur, comme, pour exemple, à une même largeur de 28 pieds.

La Voûte en plein Cintre ayant, dans l'hypothese du Problême 1er, 28 pieds de diametre, a aussi 28 pieds de largeur.

La Voûte de 120°, ayant dans l'hypothese du Probl. 2, 14 pieds de rayon, a pour sa largeur 14 $\sqrt{3}$, & nous avons trouvé que cette Voûte devoit avoir son épaisseur entre 0. 276 & 0. 275.

Si l'on prend 0. 276 pour l'épaisseur de cette Voûte, l'on aura l'épaisseur d'une Voûte semblable de 120° sur 28 pieds de largeur par cette analogie 14 $\sqrt{3}$: 28 :: ou $\sqrt{3}$: 2 :: 0. 276 est à l'épaisseur de la Voûte de 120° de 28 pieds de large, laquelle épaisseur est égale $\frac{0.552}{\sqrt{3}} = 0.184\sqrt{3} = 0.3187$.

Mais nous avons trouvé 1. 4866 pour l'épaiſſeur uniforme d'une Voûte en plein Cintre & de 28 pieds de diametre ; d'où l'on voit que l'épaiſſeur d'une Voûte de 120° doit être près de cinq fois plus petite que l'épaiſſeur d'une Voûte en plein Cintre de pareille largeur de 28 pieds.

Si l'on veut réduire en lignes l'épaiſſeur 1. 4866 de la Voûte en plein Cintre de 28 pieds de diametre, l'on fera cette analogie 10000 : 14866 :: 144 lignes : 214 lignes environ $\frac{1}{142}$, dont le quatrieme terme 214 lignes $\frac{1}{14}$ ou 1 pied 5 pouces 10 lignes $\frac{1}{14}$ eſt l'épaiſſeur d'une Voûte en plein Cintre de 28 pieds de diametre.

L'on aura, par une analogie ſemblable, l'épaiſſeur de la Voûte de 120° de 14 pieds de rayon 1000 : 276 :: 144 lignes : 39 $\frac{744}{1000}$, ou 3 pouces 3 lignes environ $\frac{3}{4}$.

L'on aura pareillement l'épaiſſeur d'une Voûte de 120° de 28 pieds de largeur par cette analogie 10000 : 3187 :: 144 lignes : 45 lign. $\frac{8928}{10000}$, ou 3 pouces & près de 10 lignes.

Comme toutes les épaiſſeurs que nous venons de trouver ſont très petites, il n'eſt pas étonnant que l'on trouve aujourd'hui des Voûtes très minces qui ſubſiſtent depuis plus de cinq cens ans.

Cependant il faut bien ſe garder de donner à une Voûte de 120° & de 28 pieds de corde une épaiſſeur qui ſoit, comme nous la venons de trouver, ſeulement de 46 lignes ; car les charnieres ou points d'appui des Vouſſoirs ſe trouveroient dans les ſurfaces de la Voûte, enſorte que ces Vouſſoirs qui por-

porteroient sur leurs Arrêtes, écraseroient bien-tôt ces Arrêtes, & par conséquent la Voûte périroit, ou changeroit de figure; c'est pourquoi il faut au moins doubler l'épaisseur que la formule nous donne, & pour-lors les points d'appui des Voussoirs seront de la quatrieme partie de l'épaisseur totale, car pour-lors l'épaisseur de la Voûte que la formule donne se trouvera au milieu de l'épaisseur totale, & comme elle en occupera la moitié, il y aura un quart de l'épaisseur totale au-dessus de l'extrados que donne la formule, & un quart au-dessous de l'intrados de la formule, & par conséquent les charnieres qui se trouvent dans l'intrados & l'extrados de la formule, se trouveront au quart de l'épaisseur totale, & dans ce cas la corde appartiendra à un arc pris au quart de l'épaisseur de la Voûte du côté de l'intrados. Il faut remarquer que ceci n'est qu'à peu près, & n'est pas exactement vrai dans la rigueur géométrique, parce que les centres de gravité des Voussoirs changent en augmentant leur épaisseur.

L'épaisseur de la Voûte étant ainsi doublée, les charnieres ou points d'appui seront en état de résister, ensorte que cette Voûte de 28 pieds de corde auroit 92 lignes, ou 7 pouces 8 lignes, & les points d'appui des Voussoirs en auroient le quart, c'est-à-dire, auroient 1 pouce 11 lignes, ce qui n'est encore qu'une trop foible épaisseur, si la Voûte doit souffrir quelque charge. En un mot, il faut augmenter l'épaisseur trouvée par la formule de la quantité nécessaire à deux

appuis, & cette nécessité doit se règler sur la bonté des matieres dont on doit construire la Voûte.

Ainsi pour que l'épaisseur résultante de notre formule, qui est de près de 3 pouces 10 lignes, soit au milieu de l'épaisseur, il faudroit tripler cette épaisseur résultante 3 pouc. 10 lignes, ce qui donneroit 11 pouc. 6 lign. pour l'épaisseur que l'on doit donner à la Voûte demandée de 14 pieds de rayon, & formée sur un arc de 120 degrés.

PROBLEME III.

Déterminer la poussée horizontale d'une Voûte, dont l'intrados & l'extrados sont circulaires, en supposant que les Voussoirs ne sont point polis, & ne peuvent pas par conséquent glisser les uns sur les autres.

SOLUTION.

* Soit le rayon MC de l'intrados $= r$.
L'épaisseur AM de la Voûte...... $= m$.
L'on aura le rayon AC de l'extrados $= r + m$.

Soit en P le centre de gravité de la demi-Voûte ANM. Et soit l'arc MN de l'intrados............ $= a$.
La hauteur MO de l'intrados..... $= d$.

L'on aura, par la proprieté des centres de gravité, la distance Pe du centre de gravité P de ladite Voûte AN à la fleche MO de la Voûte $= \frac{6drr + 6drm + 2dmm}{6ar + 3am}$.

Main-

* Fig. 4.

Maintenant puisque la pesanteur de la demi-Voûte est réunie à son centre de gravité *P*; si par ce centre de gravité *P*, l'on tire la verticale *LR*, & que par le point *S*, milieu de *AM*, l'on tire l'horizontale *SL*, & que du point *L*, où elle rencontre la verticale *LR*, l'on tire *LX* au milieu du Coussinet, & que du point *X*, l'on tire *XR* parallele à *LT*, & que l'on fasse *RT* parallele à *LX*, l'on aura un parallelogramme *TX*, dont la diagonale *LR* exprimant la pesanteur de la demi-Voûte *AN*, la ligne *LT* exprimera l'effort que cette demi-Voûte *AN* fait horizontalement pour résister à l'effort semblable de l'autre demi-Voûte, & la ligne *LX* exprimera l'effort que cette même demi-Voûte *AN* fait suivant cette direction *LX* contre le Coussinet.

Mais l'effort *LX* n'étant point perpendiculaire sur le rayon *BC*, ou, ce qui est le même, sur le joint *BN*, & faisant un angle obtus *LXB*, glisseroit sur ce joint *BN* du côté de *B*, si le joint étoit parfaitement poli; mais si le joint *BN* n'est point poli, la force *LX* y trouvera un appui solide, malgré son obliquité, attendu l'engrénage des parties.

Il faut donc nécessairement supposer que les joints d'une Voûte circulaire sont graveleux, ensorte que les Voussoirs ne puissent point glisser les uns sur les autres.

Cela posé, il faut chercher quel est l'effort *LX* que le Voussoir *AN* fait contre le Coussinet *BN*.

Mais cette force *LX* se décomposant en

deux forces ZX, RX, dont la verticale ZX exprime la pesanteur du Voussoir, & l'horizontale RX exprime l'effort horizontal qui se fait contre le pied-droit, il vaut mieux chercher quelle est cette force verticale ZX, & cette force horizontale RX, comme ci-après.

Comme le secteur XCS est semblable au secteur NCM;
L'on aura $CM : CS :: MO : SQ$.

C'est-à-dire $r : r + \frac{m}{2} :: d : SQ = \frac{dr + \frac{dm}{2}}{r}$.

Mais $SQ = LR$. Donc $LR = \frac{dr + \frac{dm}{2}}{r}$
$= \frac{2dr + dm}{2r}$.

L'on aura aussi $CN : CX :: NO : XQ$.
C'est-à-dire .... $r : r + \frac{m}{2} :: NO : XQ$.

Mais. .... $NO^2 = CN^2 - CO^2$.
Et $CO^2 = rr - 2dr + dd$, parce que $CO = r - d$.
Et $CN^2 = rr$. Donc $NO^2 = CN^2 - CO^2 = 2dr - dd$.

Donc $r ; r + \frac{m}{2} :: \sqrt{2dr - dd} : XQ$
$= \frac{r + \frac{m}{2} \times \sqrt{2dr - dd}}{r}$.

Maintenant si de XQ, que nous venons de trouver $= \frac{r + \frac{m}{2} \times \sqrt{2dr - dd}}{r}$, l'on retranche RQ, ou son égal $P\rho$, que nous avons trou-

trouvé $= \frac{6drr + 6drm + 2dmm}{6ar + 3am}$, le reste

$\frac{r + \frac{m}{2} \times \sqrt{2dr - dd}}{r} - \frac{6drr - 6drm - 2dmm}{6ar + 3am}$

sera la valeur de XR, qui exprime l'effort horizontal que la Voûte fait contre le pied-droit ou pilier-butant.

Maintenant si l'on exprime la pesanteur de la demi-Voûte par sa surface ANM, au-lieu de l'exprimer par LR, comme nous l'avons fait ci-devant, l'on aura cette surface ANM de la maniere suivante.

Puisque l'arc MN de l'intrados $= a$, l'on aura l'arc At de l'extrados par cette analogie,

$$CM : CA :: MN : At.$$

C'est-à-dire $r : r + m :: a : At = \frac{ar + am}{r}$.

Et si l'on multiplie ces deux arcs $MN = a$ & $At = \frac{ar + am}{r}$ par la moitié de leur distance AM, c'est-à-dire, par $\frac{m}{2}$, le produit $\frac{ma}{2} + \frac{amr + amm}{2r} = \frac{2amr + amm}{2r}$ sera la surface de la demi-Voûte $AtNM$, c'est-à-dire, sera la pesanteur de cette demi-Voûte.

Mais la pesanteur de cette demi-Voûte est à l'effort horizontal RX comme LR est à RX; l'on aura donc l'effort horizontal qui se fait suivant RX par cette analogie LR, que nous avons trouvée $= \frac{2dr + dm}{2r}$,

est à $RX = \frac{r + \frac{m}{2} \times \sqrt{2dr - dd}}{r}$ $- \frac{6drr - 6drm - 2dmm}{6ar + 3am}$ comme la pesanteur $\frac{2amr + amm}{2r}$ de la demi-Voûte est à l'effort horizontal de la Voûte suivant RX, que l'on trouvera $= \frac{2amr + amm}{2dr + dm}$

$$\times \overline{\frac{\overline{r + \frac{m}{2}}\sqrt{2dr - dd}}{r} - \frac{6drr - 6drm - 2dmm}{6ar + 3am}} = \frac{am}{d}$$

$$\times \overline{\frac{\overline{r + \frac{m}{2}} \times \sqrt{2dr - dd}}{r} - \frac{6drr - 6drm - 2dmm}{6ar + 3am}}$$

$$= \frac{2arm + amm}{2dr} \times \sqrt{2dr - dd} - \frac{6mrr - 6rmm - 2m^3}{6r + 3m}$$

qui est la poussée horizontale qu'il falloit trouver.

PROBLEME IV.

* *Lorsque les Voussoirs ne sauroient glisser les uns sur les autres, trouver la base* EF *du pied droit, telle que l'effort composé de la pesanteur de la Voûte, de sa poussée horizontale, & de la pesanteur dudit pied-droit, soit dirigé vers un point donné quelconque* H *de ladite base* EF.

So-

* Fig. 4.

SOLUTION.

Pour abreger le calcul, soit regardé le trapeze $BIFN$ comme un parallelogramme, dont la hauteur soit GV, moyenne entre BI & NF.

Quoique dans ce changement, où les surfaces sont égales, le centre de gravité D du trapeze se trouve transporté au centre de gravité K du parallelogramme, & que l'on donne par conséquent à la surface $BIFN$, regardée comme un parallelogramme, plus d'énergie qu'elle n'en auroit en la regardant comme un trapeze : ce changement est si léger, qu'on le peut regarder comme zero, puisque l'on est obligé de faire aux pied-droits des changemens beaucoup plus considerables, comme d'y percer des Fenêtres & des Portes, auxquelles cependant on ne fait aucune attention.

Soit donc la hauteur moyenne VG du pied-droit . . . . $= p$.

La base IF du trapeze regardé comme parallelogramme . . . . $= q$.

Puisque $BIFN$ est regardé comme un parallelogramme, nous aurons sa surface . . . . $= pq$.

Soit la base entiere EF du pied-droit . . . . $= x$.

La base EI de son fruit sera . . . . $= x - q$.

Si l'on fait la hauteur $BI = VG = p$, l'on aura la surface du talus $BIE = \frac{px - pq}{2}$.

Comme nous exprimons la pesanteur de la

Maçonnerie par son profil ou surface de sa coupe, nous aurons la pesanteur de la partie $BIFN=pq$, & nous aurons la pesanteur de la partie $BIE=\frac{px-pq}{2}$.

Maintenant soit le point d'appui H, placé de maniere que l'on ait... $EF:EH::f:g$.
C'est-à-dire que l'on ait... $x:EH::f:g$.

L'on aura... $EH=\frac{gx}{f}$.

Comme la pesanteur du parallelogramme $BIFN$ est réunie à son centre de gravité, ou son milieu K, elle est appliquée au bras de levier HG.

Mais $HG=EF-GF-EH=x-\frac{q}{2}-\frac{gx}{f}$.

Ainsi en multipliant la pesanteur pq par ce bras de levier $HG=x-\frac{q}{2}-\frac{gx}{f}$, le produit $pqx-\frac{pqq}{2}-\frac{pqgx}{f}$ sera l'énergie de la partie $BIFN$ du pied-droit.

De même si l'on multiplie la pesanteur de la partie $BIE=\frac{px-pq}{2}$ par son bras de levier HZ, le produit sera son énergie. Mais $HZ=EZ-EH=\frac{2x-2q}{3}=\frac{gx}{f}$. Donc l'énergie de la partie BIE du pied-droit sera $=\frac{2pxx-4pqx+2pqq}{6}-\frac{pgxx+pqgx}{2f}$.

Et si l'on ajoute ensemble l'énergie de la

la partie *BIFN* & celle de la partie *BIE*, leur somme $pqx - \frac{pqq}{2} - \frac{pqgx}{f}$

$$+ \frac{2pxx - 4pqx + 2pqq}{6} - \frac{pgxx + pqgx}{2f}$$

sera l'énergie du pied-droit entier sur le point d'appui *H*.

Laquelle énergie étant abregée, devient

$$\frac{2pxx + 2pqx - pqq}{6} - \frac{pqgx - pgxx}{2f}.$$

Voyons maintenant l'énergie de la Voûte qui doit faire équilibre avec le pied-droit sur le point d'appui *H*.

Nous avons trouvé, dans le Problême précédent, que l'effort de la Voûte, suivant *LX*, se décomposoit en deux autres, l'un suivant *ZX*, égal à la pesanteur de la Voûte, & l'autre suivant *RX*.

Mais dans le même Problême précédent nous avons trouvé la pesanteur de la Voûte $= \frac{2amr + amm}{2r}$, & l'effort horizontal suivant

$$RX = \frac{2amr + amm}{2dr} \times \sqrt{2dr - dd} - \frac{6mrr - 6mmr - 2m^3}{6r + 3m}.$$

Ainsi en multipliant la pesanteur ou l'effort vertical suivant *ZX* par son bras de levier $HY = HF - YF$, l'on aura l'énergie de l'effort vertical de la Voûte, laquelle énergie sert à affermir le pied-droit.

Mais $HF = EF - EH = x - \frac{gx}{f}$.

Et l'on peut, pour abreger, faire *YF* égale à la

la moitié de l'épaiſſeur de la Voûte, c'eſt-à-dire, $= \frac{m}{2}$.

Donc le levier $HT = x - \frac{gx}{f} - \frac{m}{2}$, lequel levier étant multiplié par la peſanteur $\frac{2amr + amm}{2r}$ de la Voûte, le produit $\frac{2amrx + ammx}{2r} - \frac{2amrgx - ammgx}{2fr} - \frac{2ammr - am^3}{4r}$ ſera l'énergie de l'effort vertical que la Voûte fait pour affermir le pied-droit.

Et ſi l'on multiplie l'effort horizontal RX de la Voûte $= \frac{2amr + amm}{2dr} \times \sqrt{2dr - dd} - \frac{6mrr + 6mmr - 2m^3}{6r + 3m}$ par ſon bras de levier $xH = VG = p$, le produit $\frac{2ampr + ammp}{2dr} \times \sqrt{2dr - dd} - \frac{6mrrp - 6mmrp - 2m^3p}{6r + 3m}$ ſera l'énergie de l'effort horizontal que la Voûte fait pour renverſer le pied-droit.

Comme l'effort vertical que la Voûte fait, ſert à affermir le pied-droit, & que l'effort horizontal tend à le renverſer, ſi l'on retranche l'énergie de l'effort vertieal de la Voûte, de l'énergie de ſon effort horizontal, le reſte ſera la véritable énergie que la Voûte employe pour renverſer le pied-droit ſur le point d'appui H, & ce reſte ſera

$$\frac{2ampr + ammp}{2dr} \times \sqrt{2dr - dd} - \frac{6mrrp - 6mmrp - 2m^3p}{6r + 3m}$$

$$- \frac{2amrx - ammx}{2r} + \frac{2amrgx + ammgx}{2fr}$$

$$+ \frac{2ammr + am^3}{4r}.$$

Maintenant puifque, fuivant l'hypothefe, l'effort compofé de la pefanteur de la Voûte, de fon effort horizontal, & de la pefanteur du pied-droit, doivent être dirigés vers le point d'appui H, il faut que l'énergie du pied-droit & l'énergie de la Voûte foient en équilibre, c'eft-à-dire, égales fur ce point d'appui H, ce qui donne cette Equation $\frac{2pxx + 2pqx - pqq}{6}$

$$- \frac{pqgx - pgxx}{2f} = \frac{2ampr + ammp}{2dr} \times \sqrt{2dr - dd}$$

$$- \frac{6mrrp - 6mmrp - 2m^3p}{6r + 3m} - \frac{2amrx - ammx}{2r}$$

$$+ \frac{2amrgx + ammgx}{2fr} + \frac{2ammr + am^3}{4r}.$$

D'où l'on tire

$$x = \sqrt{\left\{ \begin{array}{l} \frac{qqf}{2f - 3g} + \frac{6amfr - 3ammf}{2fdr - 3gdr} \times \sqrt{2dr - dd} \\ - \frac{12mrrf - 12mmrf - 4m^3f}{4rf + 2mf - 6rg - 3gm} + \frac{6ammrf + 3am^3f}{4prf - 6pgr} \\ + \left\{ \frac{q}{2} + \frac{6amrf + 3ammf - 6amrg - 3ammg}{4pfr - 6pgr} \right\}^2 \end{array} \right\}}$$

$$- \frac{q}{2} - \frac{6amrf - 3ammf + 6amrg + 3ammg}{4pfr - 6pgr}.$$

Ce qu'il falloit trouver.

Co-

COROLLAIRE.

Si l'on vouloit que le point d'appui H, vers lequel est dirigé l'effort composé de la Voûte & du pied-droit, fût dans la surface extérieur du pied-droit, il faudroit faire $EH = 0$; & comme nous avons fait $EF : EH :: f : g$, l'on aura $EF : 0 :: f : g$, & par conséquent l'on aura $g = 0$.

Substituant donc 0 en la place de g dans la formule du Problême, l'on aura une autre Equation qui donnera la base x du pied-droit, telle que l'effort composé de la poussée de la Voûte & de la pesanteur du pied-droit sera dirigé vers l'extrémité extérieure de la base, & cette formule sera

$$x = \sqrt{\left\{ \begin{array}{l} \frac{qq}{2} + \frac{6amr - 3amm}{2dr} \times \sqrt{2dr - dd} \\ - \frac{6mrr - 6mmr - 2m^3}{2r + m} + \frac{6ammr + 3am^3}{4pr} \\ + \left\{ \frac{q}{2} + \frac{6amr + 3amm}{4pr} \right\}^2 \end{array} \right\}}$$

$$- \frac{q}{2} - \frac{6amr - 3amm}{4pr}.$$

Application du Problême précédent à une Voûte, dont les dimensions & la hauteur du Pied-droit soient données, & dans laquelle il s'agit de trouver la base EF *du Pied-droit.*

* Soit une Voute, dont l'intrados soit un arc

* Fig. 4.

arc de 120°, & dont la corde soit de 28 pieds, la moitié de cette corde sera le sinus de 60°, ainsi l'on aura le rayon r de la Voûte par cette analogie,

Le sinus de 60°, qui est de..... 86602
Est au rayon ou sinus total..... 100000
Comme la moitié de la corde de Voûte, c'est-à-dire 14. Est au rayon de ladite Voûte, lequel rayon se trouve par l'opération de 16 $\frac{17}{100}$.

Soit l'épaisseur de la Voûte $= \frac{4}{5}$,

Puisque l'arc MN est de 60 degrés, l'on aura MO, c'est-à-dire, la hauteur de la fleche de l'intrados au-dessus du pied-droit égale à la moitié du rayon, c'est-à-dire, égale 8. 085.

Mais nous avons fait $MO = d$, donc l'on aura $d = 8.085$

Puisque le rayon de la Voûte =	16. 17.
Son diametre sera	32. 34.
Multipliant ce diametre par	3. $\frac{1}{7}$.
	97. 02.
	4. 62.

Le produit......... 101. 64. donnera la circonference, dont la sixieme partie 16. 94 sera la valeur de l'arc de 60 degrés, c'est-à-dire, sera la valeur de la moitié de l'intrados, laquelle moitié nous avons appellée a.

Maintenant soit la hauteur p
du pied-droit........... = 20
la base q de la partie parallelipipedale du pied-droit...... = $\frac{4}{5}$ de même que l'épaisseur de la Voûte.

Enfin le point H, où l'on veut que soit diri-

dirigé l'effort composé de tous les efforts, soit éloigné de la face extérieure dudit pied-droit de la valeur de $\frac{1}{3}$ de sa base, c'est-à-dire, de maniere que l'on ait $EF : EH :: 3 : 1$.

Mais nous avons dans le Problême précédent $EF : EH :: f : g$, donc nous avons $f = 3$, & $g = 1$.

Et si l'on substitue dans l'Equation qui donne la valeur de x ces grandeurs

	16. 17	8. 085	16. 94	20	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	3	1
en la place de	r	d	a	p	q	m	f	g

L'on trouvera $x = 5$ pieds $\frac{1}{2}$ pour la base du pied-droit cherchée, sur laquelle base $x = EF$, le point d'appui H est au tiers de ladite base, ensorte que HF sera de 3 pieds $\frac{2}{3}$.

Application du Corollaire du Problême précédent à une Voûte, dont les dimensions sont comme celles du Problême, & dans laquelle il s'agit de trouver la base EF, *telle que la poussée de la Voûte & de la pesanteur du pied-droit soient dirigées vers l'extrémité extérieure* E *de ladite base.*

Comme les dimensions de la Voûte sont toujours les mêmes, l'on aura, comme dans l'application du Problême,

	16. 17	8. 085	16. 94	20	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
pour	r	d	a	p	q	m

Substituant ces grandeurs déterminées en la place des lettres dans l'Equation du Corollaire, l'on aura la base $x = 3.\frac{66}{100}$, c'est-à-dire $= 3$ pieds $\frac{2}{3}$.

Comme le pied-droit ou son profil est composé

Mem. de l'Acad. 1730 Pl. 11 Pag. 202.

N

E

G

L P C

G X

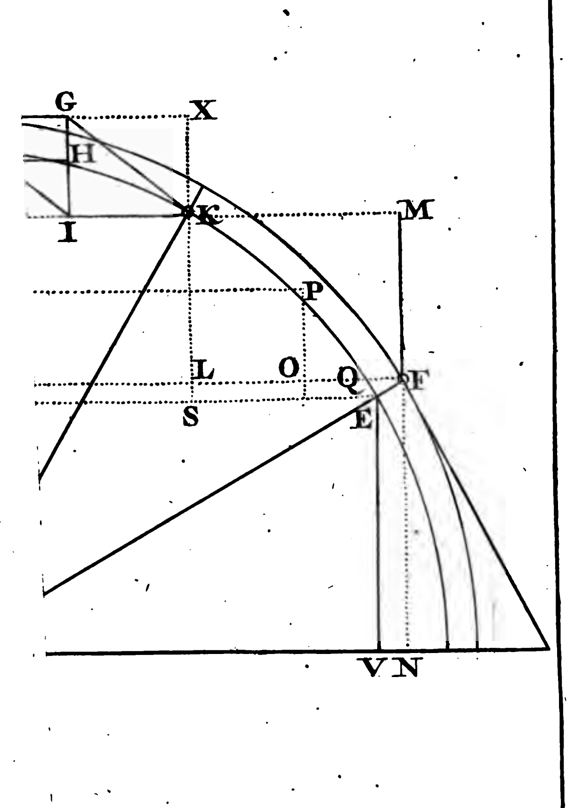
H

M

I K

P

L QE F


G
X
H
K
I
M
P
L
O
Q
F
S
E
V
N

poſé de deux parties, dont l'une eſt parallelogrammique, & que l'épaiſſeur ou baſe de la partie parallelogrammique eſt égale à l'épaiſſeur de la Voûte qui eſt de $\frac{2}{3}$, il reſtera 3 pieds pour le fruit ou baſe de la partie qui eſt triangulaire; & ſi l'on ajoute $\frac{1}{3}$ à ces 3 pieds pour prévenir l'écraſement des parties, la baſe totale du pied-droit ſera de 4 pieds; & comme la hauteur du pied-droit eſt de 20 pieds, cette baſe totale de 4 pieds ſera égale à la cinquieme partie de ſa hauteur.

Si l'on faiſoit l'épaiſſeur de la muraille au pied-droit de 2 pieds par en-haut, c'eſt-à-dire, au Couſſinet, pour-lors l'on trouvera la baſe entiere $EF = x = 3.597$, c'eſt-à-dire $= 3$ pieds 7 pouces 2 lignes, en dirigeant l'effort compoſé à l'extrémité extérieure E de la baſe EF. On pourra faire de ſemblables applications pour toutes ſortes de Voûtes circulaires, dont l'épaiſſeur & la grandeur ſeront données avec la hauteur du pied-droit.

SUITE

SUITE DES OBSERVATIONS SUR L'AIMANT.

Par M. DU FAY. *

DANS le Mémoire que je lus en 1728, je rapportai plusieurs Expériences qui tendoient à prouver que si l'on veut aimanter un morceau de Fer, ensorte que sa direction soit déterminée, il ne faut que le rompre, le frapper, le frotter, enfin donner par quelque moyen que ce soit un ébranlement à ses parties, tel que les petites branches, pointes ou poils, que j'ai supposés, après Descartes & la plupart des Physiciens, remplir les pores du Fer, puissent être abattus ou renversés vers celle des extrémités qu'on veut faire diriger vers le Nord. J'ai varié ces Expériences d'un grand nombre de façons, & il me paroît qu'il peut demeurer pour constant, qu'un Fer n'est aimanté que lorsque tous ses poils, ou du moins la plus grande partie, sont couchés en un même sens.

Je ne dois pas omettre une objection qui m'a été faite sur l'extrême mobilité que je suppose dans ces petites branches ou poils; ils doivent être si déliés que leur pesanteur sera, dit-on, regardée comme nulle, & qu'il est impossible qu'ils tombent par leur seul poids,

* 19 Avril 1730.

poids, ſuivant les différentes ſituations ou les ébranlemens qu'on peut donner à la barre de Fer. Quoique cette objection ſemble forte, il eſt très facile d'y répondre. On ſait que les corps n'ont de peſanteur que relativement au milieu dans lequel ils ſe trouvent; & qu'une plume miſe dans un tuyau vuide d'air, y tombe avec la même vîteſſe, c'eſt-à-dire, y a la même peſanteur qu'un morceau de bois: or, il eſt certain que les pores du Fer ne ſont pas remplis d'air; par conſéquent, quelque déliés que ſoient ces petits poils, ils ont une peſanteur relative au milieu dans lequel ils ſe trouvent, une peſanteur réelle qui fait qu'ils ſe renverſent d'un côté ou de l'autre, ſuivant les mouvemens qu'on donne à la barre.

Si l'on a frotté un morceau de Fer ſur une Pierre d'Aimant, & que le tenant dans une ſituation perpendiculaire, on frappe ſur l'extrémité qui ſe dirige au Sud, on ne fera qu'augmenter ſa vertu, parce qu'on ne fait qu'abattre un plus grand nombre de poils vers le côté où ils doivent être: mais ſi on frappe ſur l'autre bout, les poils ſe redreſſent, le paſſage ſe ferme à la matiere magnétique, la vertu du Fer diminue; & ſi l'on continue de frapper, elle ſe perd entierement, paſſe à l'autre bout du Fer, & lui donne une direction contraire à celle qu'il avoit auparavant.

Ces faits, qui ſont fondés ſur l'expérience, étant une fois bien établis, il ſuit aſſez naturellement, qu'il n'y a qu'un ſeul courant de la matiere magnétique, & qu'elle entre dans le Fer aimanté par le côté qui ſe dirige vers

vers le Sud, puisque les poils qui sont couchés vers l'autre extrémité la laissent entrer & sortir sans peine lorsqu'elle va dans ce sens, mais qu'ils s'opposeroient à son entrée en lui présentant leurs pointes, si elle alloit dans le sens opposé. Cette hypothese, & celle du renversement des poils, étant admises, tous les phénomenes de l'Aimant s'expliquent avec une facilité infinie. J'ai donné dans mon premier Mémoire l'explication de ceux qui sont le plus connus: mais si l'on veut se donner la peine d'en faire l'application à tous les autres, en y joignant l'unité du courant, j'ose assûrer que l'on en trouvera l'explication plus facile que dans aucun autre systême.

Je dois avertir ici, que pour éviter l'obscurité ou l'équivoque, je ne désignerai point les poles de l'Aimant par les noms de Boreal & d'Austral, parce que, quoiqu'il soit reçu que le pole qui se dirige vers le Sud soit le Boreal, il m'a paru que cette définition ne se présentoit pas toujours bien nettement à l'esprit, & j'ai cru qu'il valoit mieux les désigner par celui qui se dirige au Nord, & celui qui se dirige au Sud.

Une particularité très connue de l'Aimant & du Fer aimanté, est que le pole qui se dirige vers le Nord, leve plus de Fer que l'autre. Descartes & presque tous les Physiciens qui l'ont suivi, ont supposé, premierement, que cela n'arrivoit que dans les Païs septentrionaux, sans se fonder sur aucune Experience, que je sache; & ils ont expliqué ce fait, en disant que le pole Boreal de la Terre,

considéré comme un grand Aimant, fortifioit le pole Austral des Pierres d'Aimant, ou du Fer aimanté, de même qu'il arrive à deux Aimants qu'on approche l'un de l'autre par les poles de different nom.

Il y a plusieurs choses à considerer dans cette explication. 1°. Quoiqu'il soit certain que dans ce Païs-ci le pole de l'Aimant qui se dirige vers le Nord leve plus de Fer que l'autre, & qu'il n'y ait qu'à plonger une Pierre d'Aimant dans la limaille pour en être convaincu, il est néanmoins très douteux que cela n'arrive pas de même dans les Païs méridionaux, & il sera du moins permis d'en douter jusqu'à ce qu'on en ait fait quelques Expériences. 2°. L'Expérience qui est apportée en comparaison, n'est vraye que dans un cas qui n'est assûrément pas celui de la Terre à l'égard d'un Aimant, & il est très aisé de s'en éclaircir de la maniere la plus convaincante; il ne faut qu'approcher l'un de l'autre deux Aimans à peu près d'égale force, par les poles de different nom, sans qu'ils se touchent cependant, parce qu'alors ils ne feroient plus l'effet que d'un seul Aimant; on plongera ensuite dans la limaille le pole de l'un des Aimants qui se dirige vers le Nord, ensorte qu'il se charge de tout ce qu'il en pourra porter. S'il étoit vrai que la proximité du pole de l'autre Aimant augmentât sa force, il n'est pas douteux que lorsqu'on viendra à éloigner le second, une partie de la limaille ne dût se détacher, il doit même en tomber encore davantage si on le retourne, & que l'on présente le pole du

du Nord à la place de celui du Sud, car si l'un augmentoit la force du pole du premier Aimant, l'autre doit certainement la diminuer: il n'arrive cependant rien de tout cela, & il ne tombe point de limaille du premier, soit que l'on en éloigne l'autre, ou qu'on l'en approche par l'un ou l'autre de ses poles.

J'ai observé de prendre deux Aimants à peu près d'égale force, parce que si l'un des deux est de beaucoup plus fort que l'autre, comme il est environné d'un tourbillon de matiere très étendu, il fortifie nécessairement le tourbillon de l'Aimant foible, de même qu'un Fer reçoit en présence de l'Aimant une vertu magnétique qu'il perd lorsqu'on l'en éloigne; c'est aussi l'explication que donna M. de Reaumur en 1723, de ce qu'un outil foiblement aimanté enlevoit plusieurs clous posés sur une grosse enclume, tandis qu'il en enlevoit un avec peine lorsqu'on les mettoit sur une table. Mais si la force des deux Aimants dans notre Expérience n'est pas bien differente, leur vertu n'est point du tout augmentée par l'approche des poles de different nom.

C'est cependant sur cette supposition qu'est fondée l'explication de Descartes. Mais on peut aller plus loin, & dire, que quand l'Expérience seroit vraye dans le cas de deux Aimants d'une force à peu près égale, cela ne suffiroit pas pour en conclurre qu'il arrive la même chose à l'égard de la Terre: car le peu d'effet que pourroit faire la proximité du pole Boréal de la Terre, ne peut être comparé à celui de deux Aimants que l'on met l'un au-

auprès de l'autre, & l'on ne peut pas raisonnablement regarder l'un comme une conséquence de l'autre: l'explication donnée jusqu'à présent ne peut donc pas se soutenir, & il faut nécessairement en chercher une autre; elle se trouve naturellement dans le systême d'un seul courant.

Presque tous les Physiciens ont supposé que la matiere magnétique se meut avec plus de facilité dans l'Aimant & dans le Fer aimanté, que dans l'air. M. de Reaumur a cependant fait contre ce principe quelques difficultés, qui lui semblent prouver que la matiere magnétique trouve peut-être plus de difficulté a se mouvoir dans le Fer que dans les autres corps, & qu'on pourroit expliquer par-là tous les phénomenes de l'Aimant. Cette idée est très ingénieuse, & mérite fort d'être approfondie; j'espere même que M. de Reaumur voudra bien nous la donner quelque jour plus en détail: mais comme l'opinion contraire est aujourd'hui presque universellement reçue, je crois devoir en faire la base de mon systême, d'autant plus même que l'opinion de M. de Reaumur étant précisément l'inverse de celle que j'admets, mon explication s'accordera également avec la sienne, en changeant seulement l'application.

M'en tenant donc à l'ancienne opinion, & supposant l'hypothese d'un seul courant suivant laquelle la maniere n'entre que par un des poles, & ne sort que par l'autre, on verra qu'elle doit non-seulement entrer par l'extrémité * *S* dont j'ai supposé les poils

 cou-

* Fig 1.

couchés de façon à lui donner un paſſage libre, mais auſſi par tous les points voiſins de ce pole, comme *B*, *C*, *D*, *E*; mais la matiere étant une fois dans le Fer, elle y reſte le plus longtems qu'il lui eſt poſſible, par la difficulté qu'elle trouve à pénétrer les parties de l'air, & par conſéquent la plus grande partie n'en ſort que par l'extrémité *N* qui eſt la plus éloignée. C'eſt donc vers ce ſeul point que ſe trouvent réunis tous les torrens de matiere qui ſont entrés par divers points du pole oppoſé. Ce pole ſe trouvera donc avoir plus de vertu que l'autre, par la réunion & l'abondance de la matiere. Voilà où nous mene le raiſonnement, & l'expérience nous prouve en effet que c'eſt ce pole qui enleve le plus de Fer.

Il faut encore quelque choſe cependant pour que l'eſprit ſoit entierement ſatisfait; il faut voir, & toucher, pour ainſi dire, cette difference entre la denſité du torrent de matiere à l'entrée & à la ſortie de la Pierre: il ne faut pour cela qu'examiner avec attention la plus commune de toutes les Expériences de l'Aimant, qui eſt de poſer ſur une table une Pierre d'Aimant, ou une lame d'Acier aimantée, de mettre une feuille de papier par deſſus, & de jetter avec un poudrier de la limaille de Fer ſur le papier. On ſait qu'elle s'arrange en tourbillon, & trace exactement la route de la matiere magnétique autour de la Pierre; mais ſi l'on y prend bien garde, on verra que les filets de limaille ſont toujours un peu plus reſſerrés, & plus proche les uns des autres autour du pole *N*, qui

qui se dirige vers le Nord, qu'autour de l'autre, comme on le voit dans les Fig. 1 & 2. Si l'on n'a pas fait cette attention jusqu'à présent, c'est qu'il n'est pas facile de trouver un Aimant, ni même une lame d'Acier, dont les deux poles soient d'égale bonté; le mêlange de parties hétérogenes dans l'Aimant, & la façon de toucher les lames, peuvent causer de si grandes varietés, qu'il n'est pas étonnant qu'on ne se soit point apperçu jusqu'à présent de cette disposition du tourbillon, qui n'est pas infiniment remarquable, mais que l'on trouvera toujours constante, si l'on se sert d'une lame touchée bien également, avec les précautions que je rapporterai à la fin de ce Mémoire, & que l'on ait soin de répandre la limaille le plus également qu'il sera possible.

Il me semble que cette Observation est une nouvelle preuve de l'unité du courant, & de la direction de son mouvement. J'en ajouterai encore une qui mérite quelque attention, quoiqu'à dire le vrai, elle doive être regardée comme une convenance avec le systême, plutôt que comme une preuve. M. Halley, & plusieurs autres Physiciens depuis lui, ont dit que la matiere magnétique pouvoit avoir quelque part aux Lumieres boréales. Sans entrer dans le détail de leurs opinions particulieres, je dirai simplement qu'on pourroit les expliquer en cette sorte. Les exhalaisons inflammables, ou même dont quelques-unes sont déja enflammées, étant répandues dans l'air, si leur degré de densité ou de pesanteur les amene à la distance de

la Terre où la matiere magnétique circule en plus grande abondance, ce torrent qui coule vers le Nord, rassemble ces exhalaisons éparses dans toute l'Athmosphere, & les réunit vers le pole; celles qui sont déja enflammées embrasent les autres, ou la seule collision les allume, & le courant de matiere les dispose en forme de rayons, tels que nous les voyons. On peut encore ajouter, que suivant les observations les plus exactes, le centre auquel aboutissent ces rayons, décline presque toujours vers l'Ouest de 14 ou 15 degrés, ce qui est à peu près la quantité dont l'Aiguille décline présentement. Si ce centre des rayons des Aurores boréales venoit à suivre à l'avenir les variations de l'Aimant, cela pourroit nous mener à quelque chose de plus positif: mais je ne pousserai pas maintenant plus loin cette explication, qui n'est qu'une conjecture, quoiqu'elle ne soit pas absolument sans vraisemblance, & qu'elle puisse devenir beaucoup plus forte, si jamais nous sommes assûrés par de bonnes Observations, qu'on ne voit pas de pareilles lumieres vers le pole méridional.

Ce n'est pas assez d'avoir tâché d'établir le systême d'un seul courant par les diverses preuves que j'ai pu en trouver, il faut à présent répondre aux objections qu'on peut y faire. Celle qui se présente le plus naturellement à l'esprit, est que s'il n'y avoit qu'un seul courant de matiere magnétique, une Aiguille aimantée étant posée librement sur la surface de l'eau, seroit portée par le mouvement de la matiere vers l'un des poles, &

que

que pour que cela n'arrive point, il faut qu'elle soit poussée par deux courans d'égale force, dont l'un fasse équilibre à l'autre, & qui ne lui permettent que de tourner sur elle-même pour se diriger vers les poles, sans la pousser plutôt vers l'un que vers l'autre.

Avant que de répondre à cette objection, on peut dire qu'elle seroit presque aussi forte contre le systême des deux courans; car comme le pole qui se dirige vers le Nord est plus fort que l'autre, il s'ensuivroit que le courant du Sud au Nord auroit plus de force, & que par conséquent l'Aiguille devroit être emportée vers le Nord; ainsi l'objection est à peu près la même dans tous les systêmes: mais elle n'en est pas plus solide, & il est facile d'y répondre. Il ne faut pour cela que se souvenir du principe reçu dans presque toutes les hypotheses, qui est que la matiere se meut avec plus de facilité dans l'Aimant, ou dans le Fer aimanté, que dans l'air. Ce principe établi, l'Aiguille posée sur l'eau ne doit point avoir de mouvement processif vers le Nord, car pour qu'elle fût entraînée par le courant de la matiere, il faudroit que la matiere trouvât plus de résistance à pénétrer les pores de l'Aiguille, que l'Aiguille même n'en trouve à vaincre le frottement des parties de l'eau; mais comme la matiere passe très librement dans les pores de l'Aiguille suivant sa longueur, il n'y a aucune partie de la force employée à porter l'Aiguille vers le Nord, & cette force ne doit tendre qu'à la faire tourner, ensorte que ses pores se présentent le plus avantageusement qu'il est

possible au courant de la matiere; ainsi l'Aiguille ne peut avoir que le mouvement de direction.

La seconde objection est prise d'un Mémoire présenté à l'Académie par M. de Créquy, dont l'objet étoit de prouver qu'il y a deux courans de matiere dont les directions sont opposées. Il employe d'abord l'objection à laquelle nous venons de répondre, & qui a été faite plus d'une fois, & il se sert ensuite de l'Expérience suivante. Il a fait faire une Aiguille dont l'un des bouts depuis la chape est de Cuivre, & l'autre est d'Acier; cette Aiguille est par rapport au torrent de matiere magnétique, dans le même cas que si la moitié de Cuivre n'y étoit point, & en effet elle ne sert qu'à faire équilibre à l'autre. M. de Créquy prétend que si l'on touche une pareille Aiguille, ensorte que le bout d'Acier se doive diriger vers le Sud, il est impossible qu'elle s'y dirige en cas que la matiere vienne du Sud, de même qu'une girouette ou une banniere ne dirigera jamais sa pointe vers le côté d'où vient le vent; il dit la même chose à l'égard du Nord, d'où il conclud qu'il y a nécessairement deux courans, dont l'un chasse l'Aiguille vers le Nord, & l'autre vers le Sud. Voilà les raisons & l'exemple sur lequel il se fonde; mais pour peu qu'on y fasse d'attention, on verra que rien n'est si different que le cas de la girouette & celui de l'Aiguille. Dans le premier, l'effort du vent est continuellement appliqué sur les parties extérieures de la girouette, & la doit pousser par conséquent jusqu'à ce qu'il l'ait pla-

placée dans la direction de ſon courant. Mais il n'en eſt pas de même de l'Aiguille, le courant qui l'entraîne, n'agit en aucune façon ſur ſes parties extérieures; au contraire, la matiere pénétre l'intérieur de l'Aiguille, & ce n'eſt que ſuivant la direction des parties internes du Fer que le courant doit agir. Nous avons ſuffiſamment établi dans le premier Mémoire, qu'il ne falloit qu'abattre les pointes que l'on ſuppoſe dans les pores du Fer, vers celle des extrémités que l'on veut faire diriger vers le Nord. Si l'on tourne l'Aiguille, enſorte que les pointes ſe préſentent au courant, il eſt certain que la matiere qui n'agit que ſur elles, puiſque ce ſont ces pointes ſeules qui réſiſtent à ſon paſſage, les heurtera toutes, enſorte qu'elle fera tourner l'Aiguille juſqu'à ce qu'elle lui préſente le pole oppoſé par lequel elle doit entrer. La figure extérieure de l'Aiguille n'y fait rien, & il ſuffit qu'elle ſoit mobile; car quand on toucheroit l'Aiguille d'un ſens contraire, ce qui renverſeroit les pointes vers la chape, il arriveroit encore la même choſe, l'Aiguille ſera toujours portée par le courant dans le ſens que ſes pointes ſeront tournées, & ſans que ſa figure extérieure y entre pour rien, puiſque dans aucun cas la force du courant de la matiere ne peut y être appliquée: ainſi on voit qu'il n'y a nulle parité entre l'exemple de la girouette & celui de l'Aiguille qui n'a qu'une moitié d'Acier, & que par conſéquent l'objection tombe d'elle-même.

On peut ajouter, que quand on voudroit ſuppoſer qu'une pareille Aiguille fût abſolu-

ment dans le cas de la girouette, il ſeroit impoſſible d'expliquer ſa direction par le moyen de deux courans; car ſi une girouette étoit expoſée à deux vents, dont les directions fuſſent préciſément oppoſées, la force de l'un des deux vents ſeroit ſupérieure à l'autre, ou elles ſeroient égales. Dans le premier cas, la girouette ſeroit certainement entraînée par celui dont la force eſt la plus grande, & elle ſera comme ſi elle n'étoit expoſée qu'à un ſeul vent, dont la force ſera exprimée par l'excès de l'un ſur l'autre. Dans le ſecond cas, les deux forces ſe feront équilibre, & laiſſeront la girouette indifferemment dans toutes les ſituations où elle ſe trouvera. Ainſi le ſyſtême des deux courans eſt encore moins favorable que l'autre à l'explication de la direction de l'Aiguille qui n'a qu'un des bouts d'Acier, & nous venons de voir qu'il n'y a nulle difficulté en ſuppoſant un ſeul courant, puiſque la matiere n'agit que ſuivant l'inclinaiſon des parties intérieures de l'Aiguille auxquelles ſeules elle eſt applicable, & nullement ſuivant ſa forme extérieure.

Je ne crois pas qu'il y ait d'autre objection contre l'unité du courant, qui mérite attention. Je ne parle point ici de la déclinaiſon qui n'a rien de plus difficile dans ce ſyſtême que dans tous les autres, & qui n'a aucun rapport avec les proprietés de l'Aimant dont j'ai entrepris de parler dans ces deux Mémoires. Pour ne me pas borner dans celui-ci à l'établiſſement d'un ſyſtême qui n'eſt qu'une recherche purement ſpéculative, je vais ajou-

ter

ter quelques remarques sur la maniere d'aimanter les Aiguilles & les lames de Fer ou d'Acier, & d'armer les Pierres d'Aimant, pour produire l'effet le plus avantageux. Ces Observations tendent toutes à confirmer l'unité du courant, ou du moins elles s'accordent mieux avec ce systême qu'avec tout autre.

On peut réduire à deux les differentes manieres de toucher les Aiguilles sur la Pierre d'Aimant. L'une est de les passer sur une des armures de la Pierre, & l'autre de les passer sur toutes deux. Il est certain que la maniere la moins avantageuse est de ne les passer que sur une ; car premierement, pour toucher en cette sorte, il faut que l'Aiguille fasse avec la direction du courant de la matiere un angle assez grand, ce qui fait que les poils ne peuvent pas être couchés bien exactement dans le sens de la longueur de l'Aiguille. En second lieu, le torrent de matiere se trouve nécessairement partagé, parce qu'il y en a une partie qui tend à couler dans l'Aiguille, & le reste à passer dans l'autre pole de l'Aimant. Enfin l'Aiguille touchée de cette maniere sur le pole de la Pierre qui se dirige au Sud, sera encore moins aimantée que si on la touche sur l'autre, parce que la matiere sortant par ce dernier, est plus réunie, & a plus de force, comme nous l'avons prouvé au commencement de ce Mémoire. Ces conjectures sont confirmées par l'expérience, & il est aisé à chacun de les vérifier.

L'autre maniere de toucher, est de glisser l'Aiguille sur les deux armures, la tenant parallele à l'axe de la Pierre, ce qui se peut

encore faire en deux façons, car on verra que rien n'eſt à négliger dans une matiere auſſi ſuſceptible des plus petites délicateſſes. On peut retirer l'Aiguille de deſſus les armures, en continuant de la gliſſer d'un bout à l'autre, enſorte que la partie qui a d'abord touché un des poles de l'Aimant, vienne enſuite à toucher l'autre. Pour peu qu'on réfléchiſſe, on verra bien que cette maniere n'eſt pas la meilleure, puiſque le même bout de l'Aiguille qui avoit poſé d'abord ſur le pole par lequel la matiere ſort de la Pierre, & dont les parties ſeront par conſéquent diſpoſées de façon à l'y laiſſer entrer, venant à paſſer enſuite ſur le pole oppoſé, la matiere qui entre dans la Pierre par ce pole doit néceſſairement détruire une partie de l'arrangement qui s'étoit fait lorſque ce même bout étoit ſur l'autre pole de la Pierre.

Il réſulte donc de-là, que la meilleure maniere de toucher une Aiguille, eſt de la poſer ſur la tête des armures d'un Aimant; & ſi l'Aiguille eſt plus longue que l'axe de l'Aimant, on la gliſſera un peu, enſorte que chaque partie de l'Aiguille touche les armures; mais en la retirant, on la détachera parallement à l'axe, ſans la gliſſer toute entiere ſur les deux poles, parce que, comme nous venons de l'obſerver, ſa vertu diminueroit, ſi le bout qui a été d'abord ſur un des poles venoit à paſſer ſur l'autre. L'expérience confirme parfaitement cette théorie, & l'Acier touché en cette ſorte a beaucoup plus de vertu magnétique que des deux pre-

mie-

mieres manieres, qui sont cependant presque les seules qui soient en usage.

Je rapporterai à cette occasion une Expérience qui ne se trouve dans aucun des Auteurs qui sont venus à ma connoissance; c'est que si l'on glisse une Aiguille à la distance d'environ deux lignes des armures d'une Pierre, sans toucher à la Pierre, il n'importe pour cet effet qu'on la glisse du Nord au Sud, ou du Sud au Nord, ou même qu'on la tienne immobile pendant un instant à quelque distance des armures; elle acquiert dans ces trois cas une direction semblable à celle qu'elle auroit, si on la posoit simplement sur les armures de la Pierre, & qu'on la retirât ensuite parallelement à l'axe, & tout opposée à celle qu'elle auroit contractée, si on l'avoit glissée d'un bout à l'autre sur les deux armures de la Pierre.

Il ne faut que jetter les yeux sur la * Figure 3e. pour voir que tout cela doit arriver ainsi, sur-tout dans le systême d'un seul courant; car, supposé qu'il suive la direction désignée par les petites fleches, on voit que si l'on glisse l'Aiguille, ou qu'on la tienne seulement dans l'étendue du tourbillon *O P*, les petits poils doivent se coucher du sens que vont les fleches, c'est-à-dire, que la matiere sortira par le bout *P*, qui par conséquent se dirigera vers le Nord. Il arrivera encore la même chose, si on pose l'Aiguille sur les armures, parce que le cours du tourbillon ne fera que se rapprocher de la Pierre, & la matiere

* Fig. 3.

tiere passera toujours par l'Aiguille en sortant d'un pole & rentrant dans l'autre; mais si l'on vient à glisser l'Aiguille sur les armures, il est nécessaire qu'elle prenne une direction opposée, puisque le bout de l'Aiguille qui étoit d'abord sur le pole *N*, vient ensuite sur le pole *M*, & que ce n'est pas de celui qu'il a touché le premier, mais du dernier, qu'il contracte la vertu qu'il conserve dans la suite.

J'ai voulu essayer s'il ne seroit pas possible de déterminer à peu près la vîtesse du courant de la matiere magnétique; mais quoique j'aye fixé un degré de vîtesse qu'elle excede de beaucoup, il s'en faut bien encore que je n'aye pu la déterminer au juste; voici quelle étoit mon idée.

Supposant toujours un seul courant qui circule dans la Pierre, & qui en sortant, va de *N* en *M*; si je parviens à faire passer une Aiguille en ce sens dans le tourbillon avec autant ou plus de vîtesse que n'en a le courant, elle ne doit point s'aimanter, parce qu'alors la matiere ayant une vîtesse égale, est comme en repos à l'égard de l'Aiguille, & par conséquent ne peut pas agir sur ses poils, ni les coucher en aucun sens. Pour tâcher d'y parvenir, j'ai ajusté une Aiguille à angles droits à l'extrémité d'une Tringle de bois de deux pieds, attachée par son autre bout à une goupille, ensorte que l'extrémité à laquelle étoit l'Aiguille, pût décrire un arc de cercle; j'ai lié vers ce bout une corde qui faisoit plusieurs tours sur un tambour de Montre. Ayant disposé le tout sur une planche,

che, lorſque j'amenois vers moi la petite tringle, je bandois le reſſort du tambour; venant enſuite à la lâcher ſubitement, la tringle partoit avec beaucoup de vîteſſe, & emportoit l'Aiguille, qui par ce moyen traverſoit très rapidement le tourbillon d'un Aimant que j'avois diſpoſé à cet effet ſur la planche. J'ai recommencé cette Expérience un grand nombre de fois, tantôt faiſant aller l'Aiguille dans le ſens du courant, tantôt dans le ſens oppoſé, & quoique j'aye cru remarquer qu'elle étoit plus vivement aimantée lorſqu'elle alloit à contre-ſens du courant, la difference étoit néanmoins ſi peu conſiderable, qu'il en réſulte toujours que le mouvement de la matiere magnétique eſt infiniment plus rapide que celui qui peut être cauſé par le débandement d'un reſſort.

Pour aimanter une lame d'Acier, on doit obſerver les mêmes choſes que nous avons dites à l'égard des Aiguilles; on la paſſera ſur les deux armures d'un Aimant, & lorſque le bout par lequel on veut finir ſera proche de l'armure, on détachera la lame parallelement à l'axe de la Pierre; on la frottera cinq ou ſix fois de la même maniere, & elle ſera auſſi bien aimantée qu'elle peut l'être. Si l'on veut compoſer un Aimant artificiel avec pluſieurs de ces lames, il y a quelques précautions à prendre. A meſure qu'on les aura aimantées, il faut les poſer contre une muraille, le bout qui ſe doit diriger au Nord en en-bas, & les éloigner les unes des autres aſſez pour que les poles de même nom ne puiſſent pas ſe nuire mutuellement. Lorſ-

qu'elles feront toutes aimantées, on les rassemblera le plus subitement qu'il sera possible, mettant ensemble les poles de même nom, & on les serrera bien avec les anneaux qui doivent avoir été préparés auparavant. Voilà la maniere qui m'a paru la meilleure pour faire un Aimant artificiel aussi fort & aussi bon qu'il le peut être.

Il y a encore quelque chose à observer sur le choix de la matiere qui se peut le mieux aimanter, & je fis quelques remarques à ce sujet, lorsque je travaillois à mon premier Mémoire; car les Expériences qui y sont rapportées, ne réussissent pas à beaucoup près si parfaitement avec une lame d'Acier, & moins encore avec l'Acier trempé. Dans ces deux dernieres, les petits poils ne sont pas si flexibles, ni si faciles à renverser que dans le Fer ordinaire, ainsi le seul renversement de la lame, ou des coups légerement donnés sur une de ses extrémités, ne peuvent en abattre qu'un très petit nombre: mais il doit résulter de cette difficulté, que lorsque les petits poils sont une fois couchés en un même sens, c'est-à-dire, lorsque l'Acier est aimanté, il doit perdre sa vertu plus difficilement; c'est aussi ce que l'expérience nous montre.

Comme les Auteurs varient extrêmement sur ce qui s'aimante le mieux, du Fer, de l'Acier, ou de l'Acier trempé, j'ai voulu m'en assurer par des Expériences exactes, & ayant fait faire quatre lames égales, l'une de Fer, l'autre d'Acier, la troisieme d'Acier trempé & la quatrieme de Fer fondu, toutes polies, je les ai toutes aimantées de la même ma-

nie-

niere. On sent, en les frottant, que celle de Fer s'attache à l'Aimant plus fortement que toutes, celle d'Acier plus que celle d'Acier trempé, & celle de Fer fondu moins que les trois autres. Les présentant à une Aiguille aimantée, la lame d'Acier l'attiroit de bien plus loin que les autres, celle d'Acier trempé l'attiroit de plus loin que celle de Fer fondu, & celle de Fer avoit beaucoup moins de vertu magnétique que toutes les autres; celle d'Acier en avoit le plus, & leur enlevoit l'Aiguille, quoiqu'elle en fût plus éloignée. Ces Expériences ne varient point, & l'explication en est facile.

Le Fer s'aimante aisément par la grande souplesse de ses poils, leur mobilité, & la facilité qu'ils ont à être couchés en tout sens; ces proprietés lui font aussi perdre la vertu magnétique avec presque autant de facilité qu'il l'a acquise; c'est ce que nous voyons par le changement de ses poles, lorsqu'on renverse la barre, qu'on la chauffe, qu'on la frappe, &c. c'est ce qui fait aussi qu'ayant été aimanté, ses parties conservent moins l'arrangement qu'elles ont reçu par la présence de l'Aimant. L'Acier, dont les poils sont moins flexibles, s'aimante plus difficilement par le renversement, par les coups; mais lorsqu'en le passant sur un Aimant, ils ont été une fois inclinés & forcés à donner passage à la matiere magnétique, ils demeurent bien plus constamment dans cet état, & la même résistance que leur manque de souplesse apportoit à l'arrangement nécessaire

pour

pour être aimantés, s'oppose aussi à leur dérangement.

Si par quelque moyen on pouvoit renverser de la même maniere les poils qui sont dans l'Acier trempé, ou dans le Fer fondu, ils conserveroient certainement encore plus de vertu que l'Acier ordinaire : mais leurs parties sont trop inflexibles, & cedent trop difficilement au torrent de matiere magnétique ; ils ne s'aimantent donc pas si bien, & acquierent moins de vertu que l'Acier ordinaire.

Enfin je conclurai de toutes ces considerations & ces Expériences, que les armures & le portant d'un Aimant doivent être de Fer, parce qu'étant toujours proches de l'Aimant, ses poils sont facilement retenus dans la même situation, & que se prêtant à toutes les dispositions, il n'y a aucune partie de la force de l'Aimant employée à les y contraindre ; l'Acier dont les parties font plus de résistance, sera moins bon ; & l'Acier trempé sera encore plus mauvais. Comme c'est à l'expérience à achever de convaincre dans les choses qui en sont susceptibles, je me suis assuré par des épreuves exactes que le raisonnement ne m'avoit point trompé, & ayant fait faire à la même Pierre des armures de Fer, d'Acier & d'Acier trempé, les plus égales qu'il a été possible, j'ai éprouvé que celles de Fer pur & doux étoient les meilleures, & que les moins bonnes étoient celles d'Acier trempé, la même Pierre ayant considerablement moins de force avec ces dernieres qu'avec les premieres.

Au-

Au reste, s'il y a dans cette opinion quelque hypothese qui paroisse difficile à admettre, c'est l'existence des branches ou poils répandus dans les pores du Fer : mais cela n'est point particulier à mon systême ; Descartes, & presque tous les Physiciens après lui, les ont admis ; il est vrai que ce n'est qu'une petite portion du systême de Descartes, mais c'est la plus simple, & celle qui a été le moins combattue. Ce n'est certainement pas rendre cette hypothese plus composée, ni moins vraisemblable, que de supposer ces poils assez mobiles pour que leur propre poids, ou des secousses réiterées les abattent vers un des bouts du Fer. C'est cependant la seule supposition dont j'ai besoin pour expliquer un grand nombre d'Expériences tant anciennes que nouvelles, qui ne l'avoient point été, ou du moins, qui l'avoient été très imparfaitement. Je vais plus loin dans ce second Mémoire, & je déduis de ces Expériences, & de mes explications, l'unité du courant de la matiere magnétique ; mais ce n'est point encore là une supposition trop hardie, ni même une opinion nouvelle : plusieurs Physiciens l'ont admise, à la vérité plutôt par l'embaras qu'ils trouvoient dans le systême opposé, que par les preuves qu'ils en ont apportées, car je ne crois pas même qu'aucun ait entrepris de déterminer de quel côté alloit le courant. Je donne donc ici un nouveau jour à cette hypothese, je la fortifie de nouvelles preuves, je réponds aux objections qu'on y a faites, & je détermine que le courant unique de la matiere magnétique

que doit aller du Sud au Nord. On voit que ce n'eſt point un ſyſtême nouveau que je hazarde, c'eſt celui de tous qui eſt le plus univerſellement reçu, que je ne fais que débaraſſer de ce qu'il avoit de plus impliqué, & qui, par l'extrême ſimplicité à laquelle je le réduis, acquiert un nouveau degré de vraiſemblance, & je dirois même quelque choſe de plus, s'il étoit permis de ſe ſervir en Phyſique du terme de Démonſtration.

EXAMEN DES LIGNES

DU QUATRIEME ORDRE

OU

COURBES DU TROISIEME GENRE.

Par M. L'Abbé DE BRAGELONGNE.

ON ne ſauroit diſconvenir que la connoiſſance des Lignes courbes ne ſoit un des objets des plus utiles de la Géometrie. Les progrès que les Anciens firent dans les Mathématiques, après avoir reconnu les proprietés des quatre Sections coniques, en ſont des preuves convaincantes. Si ces grands Hommes n'ont pas pouſſé leurs recherches plus loin, s'ils ſe ſont bornés à quatre ou cinq autres Courbes d'un genre plus élevé que les Sections coniques, ce n'eſt pas une preuve qu'ils ayent cru la connoiſſance des Cour-

Courbes plus composées, inutile & infructueuse: il paroît au contraire, qu'ils en ont senti tout le mérite, & qu'ils ont même fait de têms en tems de grands efforts pour y parvenir; mais ils manquoient de secours, je veux dire d'une Méthode qui, portant la lumiere dans les routes obscures & inconnues qu'il falloit parcourir, conduisît l'esprit humain sans lui laisser la moindre appréhension de s'égarer.

L'application de l'Algebre à la Géometrie, dont on est redevable au grand génie de M. Descartes; le Calcul de l'Infini, & toutes les nouvelles découvertes qui y ont rapport, dont les illustres Auteurs ont été presque tous Membres de cette Académie, en faisant changer de face au Monde Géometre, lui ont fourni successivement des secours qu'il attendoit depuis si longtems. Enfin un des plus illustres Membres de cette Compagnie * vient de dévoiler ce qui pouvoit rester encore d'inconnu ou de mystérieux dans la théorie des nouvelles Méthodes: en faisant connoitre l'Infini dès son origine, en le suivant dans ses differentes modifications, en l'obligeant, pour ainsi dire, de manifester ses effets les plus cachés, il a non seulement affermi les secours que la Géometrie avoit déja reçus, mais il lui en a encore procuré de nouveaux.

Entreprendre un détail de tous les avantages que la Géometrie a reçu depuis près d'un Siecle, ce seroit m'écarter de mon sujet: ain-

* M. de Fontenelle.

ainsi, en me renfermant dans les bornes que je me suis prescrites, je me contenterai de rappeller dans la mémoire des Personnes qui me font l'honneur de m'entendre, que dès que la Géométrie de M. Descartes eut paru, comme elle apprenoit l'art de renfermer dans une seule Equation les principales proprietés d'une ou de plusieurs Courbes, on s'accoutuma aisément, avec ce grand Homme, à distinguer les Courbes en Géométriques, qu'on a nommées depuis *Courbes algébriques* ou *rationnelles*, & en Méchaniques, qu'on a nommées ensuite *Courbes transcendantes* ou *algébriquement irrationnelles*.

Les premieres furent dès-lors distinguées en differens ordres, selon le degré d'élevation auquel leur Equation se trouve élevée. Cette distinction est connue de tout le monde, elle a été adoptée par tous les Géometres, & personne n'ignore aujourd'hui que la Ligne droite est la seule Ligne du premier ordre, parce qu'elle est la seule dont l'Equation ne monte qu'au premier degré; que les quatre Sections coniques sont les seules Lignes du second ordre, parce qu'elles sont les seules dont les Equations ne montent qu'au second degré.

Il y a cinquante ans qu'on ne connoissoit qu'un très petit nombre de Lignes du troisieme ordre; les deux Paraboles cubiques, la Cissoïde de Dioclès, le *Folium* de M. Descartes, la Paraboloïde du même M. Descartes, & une sixieme Courbe, qu'on peut nommer le *second Hyperbolisme parabolique*, étoient, je crois, les seules Lignes du troisieme ordre dont

dont on eût quelque connoiſſance, lorſque M. le Chevalier Newton publia ſon *Enumeration des Lignes du troiſieme ordre*, l'un des plus beaux & des plus grands ſpectacles que la Géometrie eût produit depuis longtems, dans lequel on vit paroître ſur la ſcene ſoixante & douze Courbes jusqu'alors inconnues aux Savans, à l'exception des ſix dont on vient de parler.

Le célébre Géometre Anglois ayant ſupprimé l'Analyſe qui lui avoit ouvert le chemin de cette belle découverte, M. Stirling, autre Géometre de la même Nation, entreprit treize ans après de déveloper cette Analyſe; il en donna les Principes fondamentaux dans un Ouvrage intitulé, *Illuſtratio Tractatus D. Newtonii de Enumeratione Linearum tertii ordinis*, imprimé à Oxford en 1717, dans lequel l'Auteur, en faiſant paroître une grande connoiſſance de la Géometrie la plus profonde, & une vaſte étendue de génie, découvre pluſieurs choſes curieuſes & utiles qui peuvent contribuer infiniment à la théorie des Courbes d'un genre plus élevé.

Enfin M. Nicole a commencé de lire à l'Académie un Traité de ces mêmes Courbes du ſecond genre, ou Lignes du troiſieme ordre, dans lequel il répand un nouveau jour ſur ce qui fait l'objet de ſon ouvrage, & le traite avec cette dextérité avec laquelle il manie les matieres les plus épineuſes de la Géometrie.

Je ne ferai pas difficulté d'avouer ici que j'ai travaillé quelque tems ſur le même ſujet, que mon deſſein étoit de donner un Traité com-

complet des Lignes du troisieme ordre, en suivant le plan de celui des Sections coniques de M. le Marquis de l'Hôpital, & d'y ajouter une énumeration des Lignes du quatrieme ordre. Ce Traité ne devant plus avoir les agrémens de la nouveauté, après les ouvrages des trois grands Géometres que je viens de nommer, j'ai cru que le seul examen des Lignes du quatrieme ordre, ou Courbes du troisieme genre, étant une matiere toute nouvelle, pourroit être agréable à l'Académie, & de quelque utilité au Public. Je me suis déterminé d'autant plus volontiers à le donner, qu'il m'a paru que pour entendre ce que j'ai à dire sur les figures, les contours, les differens points, les differentes branches, & les autres proprietés des Lignes du quatrieme ordre, il n'est pas absolument nécessaire d'avoir une connoissance parfaite de celles du troisieme, mais qu'il suffit d'en connoitre les plus simples, & de savoir seulement l'application de l'Algebre à la Géometrie, & les premiers principes du Calcul differentiel.

Parmi les Courbes dont j'ai à parler dans ce Traité, il y en a quelques-unes, mais en très petit nombre, qui sont connues de tous les Géometres: telles sont trois ou quatre Paraboles & autant d'Hyperboles du quatrieme ordre, dont il est parlé dans differens Ouvrages des Géometres mordernes: telle est la Conchoïde de Nicomede, qui est en usage depuis plusieurs Siecles: telle est la Lemniscate de Mrs. Bernoulli, ces deux illustres Freres, dont les noms semblent devoir subsister aussi longtems que la Géometrie: telle

est

eſt enfin une eſpece d'Hyperbole du quatrieme ordre, que M. Stirling a décrit dans l'Ouvrage que j'ai déja cité.

On a encore quelque choſe de plus ſur cette matiere, je veux parler du ſavant Traité de M. Mac-Laurin, Profeſſeur de Mathématique dans le nouveau College d'Aberdeen, & Membre de la Societé Royale de Londres, auquel trois Théoremes, publiés par M. Newton à la fin de ſon Enumeration des Lignes du troiſieme ordre, ont donné naiſſance.

Cet illuſtre Géometre annonça au Public en 1704 une Méthode pour décrire par un mouvement continu, non ſeulement les quatre Sections coniques, mais encore toutes Lignes algébriques qui ont ce qu'on appelle des *point doubles*, c'eſt-à-dire, des points par leſquels la Courbe paſſe deux fois: M. Newton nommoit particulierement les Lignes du troiſieme & du quatrieme ordre, qui ont des points doubles, mais il ſe contentoit d'annoncer cette belle Méthode ſans en donner la démonſtration ni par l'analyſe, ni par la ſyntheſe. Quelques perſonnes, pour leſquelles j'avois une extrême déférence, m'engagerent en 1708 à chercher ce que M. Newton avoit jugé à propos de cacher aux yeux du Public: j'eus le bonheur de réuſſir, & l'on fit imprimer mon Analyſe dans le Supplément du Journal des Savans du dernier Septembre 1708. Mais en donnant la démonſtration analytique de la Méthode de M. Newton, pour décrire par un mouvement continu les Courbes algébriques qui ont des points doubles, je me contentai de faire voir que par

le

le moyen des deux formules générales, auxquelles se réduisoit ma démonstration, on pouvoit trouver aisément les Equations des Lignes du troisieme & du quatrieme ordre, qui ont des points doubles, & je n'entrai dans aucun détail: les Etudes & les occupations auxquelles j'étois obligé de vaquer par rapport à mon état, ne m'ayant pas laissé le loisir de déveloper les conséquences de cette Analyse, qui m'auroient fourni la matiere d'un juste volume.

Ce que je n'avois pu exécuter en 1708, l'a été depuis, par M. Mac-Laurin, d'une maniere si avantageuse à la Géometrie, qu'on peut dire qu'elle y a gagné considerablement: car en travaillant sur cette matiere en 1708, je ne pensois qu'à la description des Courbes qui ont des points doubles ou triples, n'ayant alors d'autres vues que de découvrir le secret de M. Newton; au-lieu que M. Mac-Laurin, dans son Traité imprimé à Londres en 1720, sous le titre de *Geometria organica*, s'est attaché non-seulement à donner les démonstrations analytiques des Théoremes de M. Newton, mais encore à imaginer une méthode de décrire par des mouvemens continus les Lignes algébriques qui n'ont pas des points doubles, & principalement celles du troisieme & du quatrieme ordre, ce que M. Newton avoit jugé très difficile à exécuter commodément: *Nam Curvam aliquam*, disoit ce grand Géometre, *secundi vel tertii generis punctum duplex non habentem commodè describere Problema est inter difficiliora numerandum.*

Ainsi on doit regarder M. Mac-Laurin comme

me le Géometre qui a le plus manié les Lignes du quatrieme ordre, sans cependant avoir eu le dessein de les faire connoitre en détail, d'examiner leurs especes particulieres, & de faire remarquer en quoi elles différent les unes des autres: il semble même avoir voulu prévenir sur cela les Lecteurs les moins attentifs; car à la fin de la troisieme Section de sa premiere Partie, après avoir dit que le nombre des Lignes du quatieme ordre est très considerable, & qu'il y a bien du travail à essuyer pour les faire connoitre, il ajoute qu'il y a lieu néanmoins d'esperer qu'elles ne resteront pas inconnues aussi longtems que celles du troisieme ordre, vû le grand nombre d'habiles gens qui s'appliquent aujourd'hui à la Géometrie: *Sed his sæculis, quibus felicissimo virorum doctorum studio artes ac disciplinæ omnes elegantiores ac præsertim Geometria, ad perfectionem summam properare videntur, sperare licet Lineas quarti ordinis non tam diù latere posse extra definitos Geometriæ limites, quam priùs latuerunt eæ ordinis proximè inferioris, non ita pridem ab ipso Geometrarum Principe in lucem proditæ.*

J'ai donc cru pouvoir me flater que cet examen des Lignes du quatrieme ordre auroit au moins les agrémens de la nouveauté, & cela avec d'autant plus de raison, que ce Traité n'a nul rapport avec l'Ouvrage de M. Mac-Laurin, ni avec l'Analyse que je donnai en 1708 des Théoremes de M. Newton. En effet, il ne s'agit pas ici d'examiner les Lignes particulieres du quatrieme ordre qui naissent de tel ou tel mouvement continu & or-

organique ; mais d'aller, pour ainſi dire, chercher les Lignes de cet ordre juſques dans leurs ſources, d'en faire connoitre les differentes claſſes & les differentes eſpeces, & enſuite d'en déduire les principales proprietés par le moyen de l'Analyſe ordinaire aidée de l'Analyſe de l'Infini.

J'aurois ſouhaité pouvoir abreger cet examen, mais la crainte de devenir obſcur, en voulant être court, m'a retenu: outre cela il auroit fallu ſupprimer quantité de Théoremes nouveaux, utiles & curieux. Ainſi mon Ouvrage étant beaucoup plus long que ne ſont ceux qu'on lit ordinairement dans les Aſſemblées de l'Académie, je me vois dans la néceſſité de le diviſer en pluſieurs Sections, & les Sections en differens Mémoires propres à être lus dans les Aſſemblées de l'Académie. La premiere, qui ſera diviſée en quatre ou cinq Mémoires, contiendra les Principes fondamentaux de tout l'Ouvrage.

SECTION PREMIERE.

Principes fondamentaux de l'Examen des Lignes du quatrieme ordre.

PREMIER MEMOIRE.

DEFINITIONS ET EXPLICATIONS.

I.

I. TOutes les Courbes algébriques, de quelque genre qu'elles puiſſent être, rentrent en elles-

elles-mêmes, ou s'étendent à l'infini. Celles qui rentrent en elles-mêmes peuvent être appellées *Ovales*, d'un nom générique dont je demande la permission de me servir, quoique quelques-unes de ces Courbes ne ressemblent gueres à des Ovales ordinaires, mais c'est afin de de pouvoir les distinguer par un seul mot, de celles qui s'étendent à l'infini. Ces *Ovales* sont ou simples comme l'Ellipse ordinaire, qui est une Ovale du premier genre, ou composées comme sont presque toutes les Lignes du quatrieme ordre qui rentrent en elles-mêmes, & parmi ces Ovales composées il y en a qui se nouent en forme de ruban, & on les appelle des *Lemniscates*, nom qui leur a été imposé par les illustres Géometres de Bâle dont j'ai parlé ci-devant.

I I.

II. Les Courbes qui s'étendent à l'infini, peuvent être nommées par abréviation *Courbes* ou *Lignes infinies*, & parmi celles-ci il y en a que j'appelle *Courbes simples*, & d'autres *Courbes composées*. Les premieres sont celles qui n'ont que des branches infinies en nombre pair: les *composées* sont celles qui outre leurs branches infinies, toujours en nombre pair, ont encore des *Ovales* simples ou composées, ou des *Lemniscates*, qui font partie des mêmes Courbes, lesquelles quoique séparées, sur le plan, des branches infinies dont nous venons de parler, ne laissent pas de leur être unies par les liens secrets de l'Equation algébrique qui exprime la nature

de la totalité de la Courbe; ces portions ainsi détachées, sur le plan, des branches infinies de la Courbe à laquelle elles appartiennent, seront nommées ici *Ovales* ou *Lemniscates conjuguées*. Il y a des cas où ces Ovales deviennent infiniment petites, & se réduisent en un point, alors on le nomme par la même raison le *Point conjugué*: dans d'autres cas l'Ovale, au-lieu d'être conjuguée, est unie avec deux des branches infinies de la Courbe, alors on la nomme le *Folium* de cette Courbe, & le point où se fait cette union est dit le *Nœud*, & ce Nœud est toujours un *point double* de la Courbe.

III.

III. Les Courbes infinies, soit qu'elles soient simples, soit qu'elles soient composées, sont ou *Paraboliques*, ou *Hyperboliques*, ou *Parabolo hyperboliques*: les premieres sont celles dont toutes les branches infinies n'ont point d'*Asymptotes rectilignes*; les secondes, celles dont toutes les branches ont des Asymptotes rectilignes; & les dernieres, celles dont certaines branches infinies, toujours en nombre pair, n'ont pas d'Asymptotes rectilignes, tandis que les autres branches infinies de la même Courbe, aussi en nombre pair, ont des Asymptotes rectilignes.

REMARQUE.

IV. Je me sers ici du nom d'*Asymptotes rectilignes*, pour éviter une équivoque qui pourroit

roit causer quelque obscurité dans la suite, si je ne prenois la précaution d'en avertir. Toutes les Courbes qui s'étendent à l'infini, ont toujours des Asymptotes, mais ces Asymptotes sont ou des Lignes courbes ou des Lignes droites, & on en trouve la nature & la position, en réduisant l'équation de la Courbe qu'on examine en une ou plusieurs suites d'autant plus convergentes que l'Abscisse est grande; & cette Méthode, qui est une des plus belles découvertes de ces derniers tems, est d'une très grande utilité pour découvrir les differentes branches infinies des Courbes d'un genre élevé par le moyen des Courbes d'un genre moins élevé, ou au moins plus simple.

Les Branches infinies, dont les Asymptotes sont rectilignes, sont donc nommées *Branches hyberboliques*, & celles qui ont des Asymptotes curvilignes, sont nommées *Branches paraboliques*. Un seul exemple éclaircira ceci: La Paraboloïde de M. Descartes, qui est une Ligne parabolo-hyperbolique du troisieme ordre, est composée, comme tout le monde sait, de quatre branches infinies, dont deux sont hyperboliques, puisqu'elles ont une Ligne droite pour Asymptote, les deux autres sont paraboliques, n'ayant pas d'Asymptotes rectilignes; mais ces deux branches paraboliques ont pour Asymptote une *Parobole conique*, ou Parabole ordinaire; de laquelle elles s'approchent toujours de plus en plus en allant à l'infini, de même que les branches hyperboliques s'approchent toujours

& à l'infini de la Ligne droite, qui eſt leur Aſymptote.

DEFINITIONS.

IV.

V. Si l'on tire une ligne *AP* *, parallele à la tangente *NT* d'une parabole ou d'une hyperbole conique quelconque *MNGm*, dont *GH* (par exemple) ſoit l'axe, la courbe *MNGm*, après s'être approchée de la ligne droite *AP* de *M* en *N*, s'éloigne pendant tout le reſte de ſon cours, qui eſt infini, de la ligne droite *AP*, en allant de *N* en *G* & en *m*: cela eſt démontré. Il n'en eſt pas de même des lignes d'un ordre ſupérieur: il y en a, qui après s'être approchées de la ligne droite *AP* † de *M* en *N*, s'éloignent de cette même droite, en allant de *N* en *O*, & enſuite s'en rapprochent une ſeconde fois, en allant de *O* en *q*, après quoi elles s'éloignent une ſeconde fois, en allant de *q* en *V*, puis s'en rapprochent une troiſieme fois, & cela à pluſieurs repriſes, ſuivant le degré auquel elles ſont élevées: c'eſt ce que l'on voit arriver ſouvent aux lignes du quatrieme ordre ; ainſi pour exprimer par un ſeul mot ces differens contours, je les nomme des *ſinuoſités*, enſorte que *MNO* eſt une ſinuoſité, *NOq* eſt une ſeconde ſinuoſité, *OqV* une troiſieme ſinuoſité, & ainſi des autres: d'où il ſuit que les points *N*, *O*, *q*, ſeront nommés les ſommets des ſinuoſités, *N* le

* Fig. 1. † Fig. 2.

le sommet de la premiere, O le sommet de la seconde, & q le sommet de la troisieme.

V.

VI. Lorsqu'une ligne courbe ZMN * est en partie concave & en partie convexe vers une même ligne droite AP, le point N de cette courbe qui sépare la partie concave de la partie convexe, est nommé, comme tout le monde sait, le *point d'inflexion de la courbe*.

V I.

VII. Par les définitions donnés du *folium* & du *nœud*, il est évident que si le *folium* d'une courbe devient infiniment petit, le nœud de ce *folium* se change en un point que les Géometres modernes ont nommé *point de rebroussement*. En effet, soit $ZMmDMN$ † une courbe foliée quelconque, dans laquelle la droite MD soit ce que je nomme la mesure du *folium*, & M le nœud : il est visible que ce nœud demeurant fixe en M, si la droite MD diminue continullement jusqu'à devenir infiniment petite, il est visible, dis-je, que le *folium* diminue continuellement jusqu'à devenir infiniment petit, & enfin que tout le *folium* se confond avec le point M, & que la courbe $ZMmDMN$ prend la figure de la courbe ZMN qui a un point de rebroussement en M ‡. D'où il suit que tout point de rebroussement peut être consideré comme le nœud d'un *folium* infiniment petit.

* Fig. 3. † Fig. 4. ‡ Fig. 5.

AVERTISSEMENT.

Je crois qu'il est à propos d'avertir ici de deux choses. 1°. *Que nous nommons* point de rebrouſſement *ce que M. Newton & les autres Géometres Anglois ont nommé* cuſpis: *que ces Géometres appellent* nodus *ce que nous nommons le* folium, *& qu'ils donnent le nom de* decuſſatio *au point que nous appellons le* nœud. *J'ai cru devoir retenir les dénominations qui étoient en uſage parmi les Géometres François avant que M. Newton eût écrit ſur cette matiere.*

2°. *Que quoique nous conſiderions ici le point de rebrouſſement comme le nœud d'un folium infiniment petit, nous ne prétendons pas dire qu'il ne puiſſe être conſideré que de cette façon, car il eſt bien certain qu'on peut le regarder comme la réunion de deux points d'inflexion* N *&* M, *dont l'intervalle* NM* *eſt devenu infiniment petit. En effet soit la parabole campaniforme de M. Newton* ZNDMX, *dont la nature eſt exprimée par l'équation* $y^3 - 3ayy + 3aay = bxx$ (*dans laquelle* $DP = x$ & $PZ = y$) *il eſt conſtant que cette courbe a deux inflexions* N & M, *qui ſont parallelement à l'ordonnée principale* DL; *ſi l'on prend ſur cette ordonnée principale la portion* $DR = a$ *& ſur l'axe* DP *de part & d'autre du point* D *les portions* DB, Db, *égales l'une & l'autre à* $\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, *& que par les points* B & b *on mene les droites* BN, bM, *paralleles à* DL, *les points* N & M *où ces droites ſeront rencontrées par*

* Fig. 6.

par une autre droite RN, *menée parallélement à l'axe par le point* R, *&* *de part & d'autre de ce point; ces points, dis-je,* N *&* M *seront les deux points d'inflexion de la courbe* ZNDMX; *mais si l'on suppose maintenant* DR (a) = o, *il est visible que cette courbe* ZNDMX *se change en une seconde parabole cubique* ZNX *, *puisque son équation* $y^3 - 3ayy + 3aay = bxx$, *par la supposition de* a = o, *devient* $y^3 = bxx$, *qui est celle qui convient à la courbe qu'on nomme* seconde parabole cubique, *laquelle a un point de rebroussement à son sommet* N.

REMARQUES.

VIII. Le rapport entre les abscisses *AC* † & les ordonnées *EC* d'une ligne droite quelconque *SEMe*, dont *AP* est l'axe, étant donné en termes analytiques, il est constant 1°. que si cette droite coupe en *m* & en *M* & en tout autre point la courbe *ZMN*, dont *AP* soit l'axe, & dont les ordonnées *MP* soient paralléles aux ordonnées *EC* de la droite *SEMe*, il est constant, dis-je, que le point d'intersection *M* étant commun à la droite & à la courbe, l'abscisse *AB* qui lui correspond est commune à la droite & à la courbe, à cause de l'axe commun *AP*. Il en est de même de tout autre point d'intersection *M* de la droite *SMe* & de la courbe *ZMN*, l'abscisse *AP* qui lui correspond est commune à la droite & à la courbe.

2°. Tous les Géometres conviennent que le

* Fig. 7. † Fig. 2.

le ſimple point d'attouchement *M** eſt équivalent à deux points d'interſection infiniment près l'un de l'autre ; ainſi, la droite *SMe* étant ſuppoſée tangente en *M* de la courbe *ZMN*, il eſt clair que l'abſciſſe *AP* eſt deux fois commune à la droite *SMe* & à la courbe *ZMN*.

3°. Puiſqu'il eſt évident † qu'une tangente *SN* en un point d'inflexion *N* ⸸ touche & coupe la courbe *MN* en ce même point *N*, il eſt viſible qu'en abaiſſant de ce point *N* ſur l'axe *AP* l'ordonnée *NB*, l'abſciſſe *AB* correſpondante au point d'inflexion, doit être trois fois commune à la droite *SNe* & à la courbe *MN*.

4°. Soit ſuppoſée la droite *SNM*, tangente au point d'inflexion *N* d'une courbe *ZMNX* ‡, & en même tems ſecante de cette courbe en un autre point *M*, diſtant du point d'inflexion de la grandeur *NM* ; ſi cette diſtance *NM* devient infiniment petite, la droite *SNM* redevient ſimple tangente de la courbe au point *N* §, mais ſon attouchement eſt équivalent à quatre points d'interſection, ou à deux points d'attouchement infiniment près l'un de l'autre, & l'inflexion ne paroît plus, quoiqu'elle exiſte réellement dans un eſpace infiniment petit, ce qui pourroit faire donner à ces ſortes de points le nom d'*inflexion inviſible*, ou celui d'*inflexion de la ſeconde eſpece*.

5°. Soit ſuppoſée la droite *SN2Me*, tangente

* Fig. 3. † *Art.* 8. ⸸ Fig. 8.
‡ Fig. id. § Fig. 9.

gente en une inflexion de la feconde efpece N d'une courbe $Z\,2\,MNX$, & en même tems fécante de cette courbe en un autre point $2\,M$, diftant du point d'inflexion invifible de la grandeur $2\,MN$; fi cette diftance $2\,MN$ devient infiniment petite, il eft évident que la droite $SN\,2\,M$*, de fimple tangente qu'elle étoit, redevient tangente & fécante de la courbe ZNX en un même point N, & par conféquent qu'en ce point N il y a une inflexion invifible & une inflexion vifible: pour le diftinguer des autres points d'inflexions dont on a parlé dans l'Article 6, je le nommerai *inflexion de la troifieme efpece.*

6°. Si la droite $SN\,3\,M$† eft fuppofée tangente de la courbe ZNX en une inflexion de la troifieme efpece N, & fécante de la même courbe en un autre point $3M$, diftant de l'inflexion N de la grandeur $3\,MN$; il eft clair, que cette diftance $3\,MN$ devenant infiniment petite, la droite $SN\,3\,M$ redevient fimple tangente de la courbe au point N‡, mais fon attouchement eft équivalent à fix points d'interfection infiniment près les uns des autres, enforte qu'en ce point N il y a confécutivement deux inflexions invifibles dans un efpace infiniment petit: pour la diftinguer de celle du nombre 4 de cet Article, je la nomme *inflexion de la quatrieme efpece.*

7°. On peut s'affûrer ainfi que les courbes ont des inflexions de la 5me, 6me, 7me & 8me efpece, &c. qui font alternativement vifibles & invifibles; enforte que toutes les fois qu'un attou-

* Fig. 10. † Fig. 10. ‡ Fig. 11.

attouchement eſt équivalent à un nombre d'interſections impair, cet attouchement ſe fait en une inflexion viſible : mais lorſque l'attouchement eſt équivalent à un nombre d'interſections pair, plus grand que deux, cet attouchement ſe fait en une inflexion inviſible.

COROLLAIRE I.

IX. Il ſuit des nombres 4, 5 & 6 de l'Article précédent, qu'en abaiſſant des points d'inflexion *N* * de la ſeconde, troiſiéme ou quatrieme eſpece ſur l'axe *AP* des ordonnées comme *NB*, il ſuit, dis-je, que l'abſciſſe *AB* qui en réſulte, eſt 1°. une abſciſſe quatre fois commune à la tangente *SN* & à la courbe *XN*2*MZ*, ſi le point *N* eſt une inflexion de la ſeconde eſpece. 2°. Que cette abſciſſe *AB* eſt cinq fois commune à la droite & à la courbe, ſi le point *N* eſt une inflexion de la troiſieme eſpece. 3°. Que cette abſciſſe *AB* eſt ſix fois commune à la droite & à la courbe, ſi le point *N* eſt une inflexion de la quatrieme eſpece; & ainſi des autres inflexions d'eſpeces ſupérieures.

COROLLAIRE II.

X. Si d'un point ſimple *N* †, ou d'un point d'inflexion *N* ‡ d'eſpece quelconque; on abaiſſe ſur l'ordonnée principale *AL* une droite *NE* parallele à l'axe *AB*, qui ſoit ſécante

* Fig. 9. 10. & 11. † Fig. 1. ‡ Fig. 9. 10. & 11.

cante de la courbe en N, il est visible que l'abscisse AE n'est qu'une seule fois commune à la sécante BN & à la courbe $XN2MZ$, & que l'abscisse AB n'est qu'une seule fois commune à la sécante EN & à la courbe $XN2MZ$, soit que le point N soit une inflexion de la premiere, seconde, troisieme & quatrieme espece, ou d'une espece supérieure.

DEFINITIONS.

VII.

XI. Lorsqu'une courbe ne passe qu'une seule fois par un point quelconque M du plan sur lequel elle est décrite, ce point, entant qu'il appartient à la courbe, n'est qu'un *point simple*. Ainsi toutes les inflexions visibles & invisibles, soit qu'elles soient de la premiere, seconde, troisieme ou quatrieme espece, &c. ne sont jamais que des points simples.

VIII.

XII. * Lorsqu'une courbe, soit qu'elle s'étende à l'infini, soit qu'elle rentre en elle-même, passe deux fois par le même point M du plan sur lequel elle est décrite, ce point M, entant qu'il appatient à la courbe, est un *point double*. Ainsi, 1°. Tous les simples nœuds, ou points d'intersection de deux branches, sont des points doubles. 2°. Puisque le point de rebroussement † peut être pris pour

* Fig. 4. & 5. † Art. 7.

pour le le *nœud* d'un *folium* infiniment petit, il s'ensuit que le rebroussement d'une courbe est un point double. 3°. Le point conjugué n'étant autre chose qu'une ovale infiniment petite, il s'ensuit que le point conjugué doit être mis au rang des points doubles.

IX.

XIII. Lorsqu'une courbe passe trois fois par le même point *M* du plan sur lequel elle est décrite, ce point *M*, * entant qu'il appartient à la courbe, est un *point triple*. Ainsi, 1°. tous les nœuds d'une courbe par lesquels il passe une troisieme branche de la même courbe, sont des points triples. 2°. Le rebroussement d'une courbe étant le nœud d'un *folium* infiniment petit †, il est évident que le rebroussement d'une courbe quelconque devient un point triple, lorsqu'il passe par ce point de rebroussement une troisieme branche de la même courbe. 3°. L'ovale infiniment petite étant un point double, lorsqu'une ovale infiniment petite est adhérante à une branche de la courbe, il est évident qu'elle doit former un point triple dans l'endroit où elle est adhérante à la courbe. Cette derniere espece de point triple sera nommée *point triple invisible*, parce que l'on ne voit point, lorsque la courbe est décrite sur le plan, ce qui cause sa *triplicité*, l'ovale infiniment petite étant, pour ainsi dire, invisible.

X.

* Fig. 12. & 13. † Art. 7.

X.

XIV. Lorſqu'une courbe paſſe quatre fois par le même point *M* * du plan ſur lequel elle eſt décrite, ce point *M* eſt nommé *point quadruple*. Si elle paſſe cinq fois par le même point *M* du plan ſur lequel elle eſt décrite, ce point *M*, entant qu'il appartient à la courbe, eſt nommé *point quintuple*; & ainſi des autres points multiples à l'infini.

X I.

XV. S'il arrive qu'une des branches *DMN*†, qui forment en *M* un point double, a une inflexion en ce même point *M*, ce point double eſt nommé *point double de la ſeconde eſpece* Si les deux branches *DMN*, *DMZ*‡, qui forment le point double *M*, ont l'une & l'autre une inflexion au point *M*, ce point double eſt nommé *point double de la troiſieme eſpece*; au-lieu que le point double *M*‡, auquel les branches *DMN*, *DMZ*, n'ont aucune inflexion, eſt nommé *point double de la premiere eſpece*.

X I I.

XVI. Lorſqu'une des trois branches, dont l'interſection forme le point triple, a une inflexion au point *M*, où ſe fait cette interſection, ce point triple eſt nommé *point triple de*

* Fig. 16. † Fig. 14. ‡ Fig. 15. ‡ Fig. 4.

de la seconde espece *. Lorsque deux de ces branches ont chacune une inflexion en *M*, où se fait l'intersection des trois branches, ce point triple est nommé *point triple de la troisiéme espece* †. Enfin lorsque les trois branches, dont l'intersection commune forme le point triple, ont les unes & les autres un point d'inflexion en *M*, où se fait cette intersection, ce point triple est nommé *point triple de la quatrieme espece* ⸸, au-lieu que le point triple *M*‡; auquel les branches *DMN*, *DMm*, *ZMV*, n'ont aucune inflexion, est nommé *point triple de la premiere espece*.

SCHOLIE.

XVII. Il est aisé de conclure des définitions précédentes, 1°. Que, parmi les points quadruples, il y a cinq especes d'intersections. *La premiere espece* est lorsque les quatre branches, qui se coupent en *M*, n'ont aucune inflexion en ce même point *M*. *La seconde espece* est celle où une seule des quatre branches a une inflexion au point *M* où se fait l'intersection. *La troisieme espece* est celle où deux des quatre branches ont chacune une inflexion au point même de l'intersection. *La quatrieme espece* est celle où trois branches ont chacune une inflexion précisément au point où se fait l'intersection. Enfin les points quadruples *de la cinquieme espece* sont ceux où les quatre branches, qui se coupent en *M*, ont les unes & les autres des in-

* Fig. 17. † Fig. 18. ⸸ Fig. 19. ‡ Fig. 20.

inflexions en ce même point *M*.

2°. On peut connoitre aussi facilement ce que c'est qu'un point quintuple, & voir en même tems qu'il y a *six especes* d'interfections parmi les points quintuples, les unes sans inflexions, les autres avec une seule inflexion, les *troisiemes* avec deux inflexions, les *quatriemes* avec trois inflexions, les *cinquiemes* avec quatre inflexions, & les *sixiemes* avec cinq inflexions.

COROLLAIRE I.

XVIII. Il suit des définitions données des points doubles, triples, quadruples, & des autres points multiples, qu'après avoir mené par un point multiple quelconque *M* deux sécantes * *MB*, *ME*, faisant entre elles un angle quelconque *BME*, & prolongées jusqu'à ce qu'elles rencontrent en *B* & en *E* des droites, comme *AP* & *AL*, prises la prémiere pour l'axe, & la seconde pour l'ordonnée principale de la courbe à laquelle le point multiple *M* appartient; il suit, dis-je, des définitions précédentes, 1°. Que l'abscisse *AB* est deux fois commune à la sécante *EM* & à la courbe *ZMDMN*, & l'abscisse *AE* aussi deux fois commune à la sécante *BM* & à la même courbe *ZMDMN*, si le point *M* est un point double. 2°. Que *AB* est une abscisse trois fois commune à la sécante *EM* & à la courbe *NMDMmZMV*, & *AE* une abscisse trois fois commune à la sécante *BM* & à la même courbe *NMDMm ZMV*,

* Fig. 4. & 5. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. & 19.

il ne sauroit y avoir de tangente : car les tangentes n'étant que des prolongemens de côtés infiniment petits du premier ordre d'une branche de courbe quelconque, si par le point double *M* d'une courbe *ZNCnZ* il ne passe aucune branche finie ou infinie de cette courbe *ZNCnZ*, mais seulement une ovale infiniment petite, il est clair qu'il ne sauroit y avoir en ce point *M* de prolongement d'un côté infiniment petit du premier ordre d'une branche quelconque finie ou infinie, & par conséquent que l'expression générale des soutangentes de la courbe *ZNCnZ* ne doit fournir que des valeurs imaginaires au point double *M*, quand ce point double est une ovale infiniment petite.

REMARQUES.

XXI. De-là naît la difference qui est entre les points doubles qui sont formés par l'intersection de deux branches d'une même courbe *ZMDMN*, ceux qui sont formés par le rebroussement *M* d'une courbe *ZMN*, & ceux qui sont formés par une ovale infiniment petite, ou point conjugué *M* d'une courbe *ZNCnZ* ; les points d'intersection * ont toujours deux tangentes *TM*, *tM*, faisant entre elles un angle fini *TMt* : les points de rebroussement † n'en ont qu'une, & les ovales infiniment petites ⊥ ou points conjugués *M* n'en ont que d'imaginaires ‡.

On

* Fig. 4. † Fig. 5.
⊥ Fig. 20. ‡ Art. précéd.

On peut voir encore la difference qui est entre les points doubles d'interfection de la premiere, seconde & troisieme espece. Ceux de la premire espece [a] sont tels que l'abscisse *AB* n'est que trois fois commune à la courbe *ZMDMN*, & à la tangente *TM*, aussi-bien qu'à cette courbe & à la tangente *tM* [b]. Ceux de la seconde espece [c] sont tels que l'abscisse *AB* n'étant que trois fois commune à la courbe & à une des tangentes comme *tM*, cette même abscisse est quatre fois commune à la même courbe & à l'autre tangente comme *TM* [d]. Les points d'interfection de la troisieme espece [e] sont tels que l'abscisse *AB* est quatre fois commune à la courbe & aux deux tangentes *TM* & *tM* [f].

COROLLAIRE IV.

XXII. Il est visible, 1°. Qu'en un point triple *M* [g], formé par l'interfection des trois branches de la courbe *NMDMmZMV*, il doit y avoir trois tangentes *TM*, *tM*, *θM*. 2°. Qu'en un point triple *M* d'une courbe *NMmZMV* [h], où il y a un point de rebroussement, il ne sauroit y avoir que deux tangentes *TM*, *tM*, puisque les tangentes au point *M* des branches *NM*, *mM*, se confondent en une. 3°. Qu'en un point triple *M*, formé par l'adhésion d'une ovale infiniment petite sur une branche *ZMA* [i] d'une courbe *VNAMZ*, il ne sauroit y avoir qu'une

[a] *Fig.* 4. [b] *Art.* 19. *n.* 1. [c] *Fig.* 14.
[d] *Art. id. n.* 2. [e] *Fig.* 15. [f] *Art. id. n.* 2.
[g] *Fig.* 12. [h] *Fig.* 13. [i] *Fig.* 40.

qu'une seule tangente *TM*, les deux autres devenant imaginaires à cause de l'ovale infiniment petite.

REMARQUES.

XXIII. De-là naît la difference qui est entre un point triple formé par l'intersection de trois branches, le point triple accompagné de rebroussement, & le point triple formé par l'adhésion d'une ovale infiniment petite.

On voit aussi la difference qui est entre les points triples de la premiere, seconde, troisieme & quatrieme espece. Dans les points triples de la premiere espece [a], l'abscisse *AB* est quatre fois commune à la courbe *NMDMmZMV*, & à chacune des tangentes *TM*, *tM*, *θM*, prises séparément [b].

Dans les points triples de la seconde espece [c], l'abscisse *AB* est cinq fois commune à la courbe *NMDMmZMV* [d], & à une des trois tangentes comme *TM*, à cause du point d'inflexion *M* de la branche *DMN*, tandis que cette même abscisse *AB* n'est que quatre fois commune à la courbe *DMNMmZMV*, & aux deux autres tangentes *tM*, *θM*, prises séparément.

Dans les points triples de la troisieme espece [e], l'abscisse *AB* est cinq fois commune à la courbe *NMDMmZMV*, & à deux des tangentes au point *M* comme *TM* & *tM*, à cause du point d'inflexion *M* de la bran-

[a] Fig. 12. [b] Art. 19. n. 2. [c] Fig. 17. [d] Art. id. n. 1. [e] Fig. 18.

branche *DMN*, & du point d'inflexion *M* de la branche *DMm*, tandis que cette même abſciſſe *AB* n'eſt que quatre fois commune à la courbe *NMDMmZMV*, & la troiſieme tangente *θM* *.

Dans les points triples de la quatrieme eſpece †, l'abſciſſe *AB* eſt cinq fois commune à la courbe *NMDMmZMV* & aux trois tangentes *TM*, *tM*, *θM*, puiſque chaque branche qui paſſe par le point triple *M*, a une inflexion en ce même point *M* ‡.

AVERTISSEMENT.

De tout ce qui vient d'être dit, il eſt aiſé de déduire une Théorie générale pour les autres multiples, tels que ſont les points quadruples, quintuples, ſextuples, &c. Mais comme les lignes du quatrieme ordre dont j'ai à traiter ici, ne ſauroient avoir ni points triples de la ſeconde, troiſieme & quatrieme eſpece, ni points quadruples, ni points quintuples; en un mot, comme les lignes du quatrieme ordre ne peuvent avoir que des points ſimples, ou des points doubles de la premiere, ſeconde & troiſieme eſpece, ou au plus un ſeul point triple de la premiere eſpece; je m'abſtiens de pouſſer cette recherche plus loin, perſuadé qu'on doit en voir l'enchaînement, & qu'il n'y a perſonne qui ne puiſſe déduire toutes les conſéquences qui ſuivent des principes que l'on vient d'établir. Il faudroit allonger extrêment ce Mémoire, pour en faire un détail exact.

DE-

* *Art. id. n. id.* † Fig. 19. ‡ *Art. id. n. id.*

DEFINITIONS.

XIII.

XXIV. Si n eſt un nombre entier & poſitif, & qu'on éleve une quantité variable & connue t d'abord à l'expoſant n, enſuite à l'expoſant $n-1$, puis à l'expoſant $n-2$, & ainſi de ſuite juſqu'à l'expoſant o; ſi l'on unit ces differentes puiſſances de l'inconnue t les unes aux autres par les ſignes $+$ ou $-$, en donnant à chaque terme un coëfficient conſtant, mais indéterminé, on formera ce que je nomme *grandeurs completes du degré* n. Par exemple, n étant $=2$, ſi l'on éleve la variable t d'abord à l'expoſant 2, puis à l'expoſant 1, enſuite à l'expoſant o, & qu'on uniſſe ces trois puiſſances t^2, t^1, t^0, par les ſignes $+$ ou $-$, en multipliant le premier terme par le coëfficient conſtant β, le ſecond par le coëfficient conſtant γ, le troiſieme par le coëfficient conſtant δ, pour avoir $\beta t^2 \pm \gamma t \pm \delta$, cette formule ſera une grandeur complete du ſecond degré; de même la formule $\varepsilon t^3 + \eta t^2 + \lambda t + \mu$ eſt une grandeur complete du troiſieme degré, & celle-ci $\nu t^4 + \rho t^3 + \pi t^2 + \varphi t + \sigma$ eſt une grandeur complete du quatrieme degré, & ainſi de ſuite, enſorte que $At^n + Bt^{n-1} + Ct^{n-2} + Dt^{n-3} + Et^{n-4} +$ &c. eſt une grandeur complete du degré n: par la même raiſon $qt + a$ eſt une grandeur complete du premier degré, & $t^0 = 1$ eſt en ce ſens une grandeur complete du degré o.

XXV.

XIV.

XXV. Lorsqu'il manque quelques termes dans les formules précédentes, je les nomme *grandeurs incompletes de tel ou tel degré*, quand l'occasion se présente d'en parler; ainsi la formule $\varepsilon t^3 + \mu$ & la formule $\varepsilon t^3 + \eta t^2 + \mu$ sont des grandeurs incompletes du troisieme degré, parce qu'il manque à la premiere les termes ηt^2 & λt, & à la seconde le terme λt.

LEMME I.

XXVI. *Les deux suites marquées ici par* (A) *& par* (B), *dont la premiere est celle des grandeurs completes de la variable* t, *qui sont depuis* o *jusqu'à* n, *& la seconde celle des puissances descendantes depuis* n *jusqu'à* o, *d'une autre variable* s; *les deux suites, dis-je,* (A) *&* (B) *étant arrangées en ordre, comme on les voit ici,*

$$(A)\ldots\ 1,\ \overline{qt+\alpha},\ \overline{\beta t^2+\gamma t+\delta},\ \overline{\varepsilon t^3+\eta t^2+\lambda t+\mu},$$
$$(B)\ldots\ s^n\quad s^{n-1},\quad s^{n-2},\quad s^{n-3}$$
$$\overline{\nu t^4+\rho t^3+\pi t^2+\phi t+\sigma},\ \&c.$$
$$s^{n-4},\ \&c.$$

Si l'on multiplie le premier terme de la suite (A) *par le premier terme de la suite* (B), *le second terme de la suite* (A) *par le second terme de la suite* (B), *le troisieme terme de la suite* (A) *par le troisieme terme de la suite* (B), *& ainsi des* an-

autres jusqu'à ce que tous les termes soient épuisés, & qu'on unisse tous les produits par les signes + *ou* −, *en faisant la somme totale égale à zero: on aura l'Equation indéterminée marquée ici par* (D)

$$(D)\ldots\ s^n + \overline{qt + \alpha} \times s^{n-1} + \overline{\beta t^2 + \gamma t + \delta} \times s^{n-2} + \overline{\varepsilon t^3 + \eta t^2 + \lambda t + \mu} \times s^{n-3} + \overline{\nu t^4 + \rho t^3 + \pi t^2 + \varphi t + \sigma} \times s^{n-4} + \&c. = 0,$$

dans laquelle il n'y a que deux variables s *&* t, *& dont les termes comprennent tous les produits, qui n'excedent pas le* n^e *degré, des puissances descendantes de la variables* s *& des puissances réciproquement ascendantes de la variable* t, *qui sont depuis* n *jusqu'à zero, ces produits multipliés par les coëfficiens constans* 1, q, α, β, γ, δ, ε, *&c.*

Ce que je nomme *puissances descendantes de la variable* s, sont les puissances que l'on voit ici en (*R*), & ce que je nomme *puissances réciproquement ascendantes de la variable* t, sont celles que l'on voit ici en (*P*).

$$(R)\ldots s^n,\ s^{n-1},\ s^{n-2},\ s^{n-3},\ s^{n-4},\ s^{n-5}\ \&c.$$

$$(P)\ldots t^0\ \ t^1,\ \ t^2,\ \ t^3,\ \ t^4,\ \ t^5,\ \ \&c.$$

Les produits de toutes ces puissances descendantes, depuis *n* jusqu'à o, & réciproquement ascendantes, sont compris dans le Quarré algébrique que l'on voit ici en (*N*), dont le premier rang horizontal contient tous les produits de *R* par t^0;

N

$$N \ldots \begin{cases} t^0 s^n, t^0 s^{n-1}, t^0 s^{n-2}, t^0 s^{n-3}, t^0 s^{n-4}, \&c. \\ t^1 s^n, t^1 s^{n-1}, t^1 s^{n-2}, t^1 s^{n-3}, t^1 s^{n-4}, \&c. \\ t^2 s^n, t^2 s^{n-1}, t^2 s^{n-2}, t^2 s^{n-3}, t^2 s^{n-4}, \&c. \\ t^3 s^n, t^3 s^{n-1}, t^3 s^{n-2}, t^3 s^{n-3}, t^3 s^{n-4}, \&c. \\ t^4 s^n, t^4 s^{n-1}, t^4 s^{n-2}, t^4 s^{n-3}, t^4 s^{n-4}, \&c. \\ \&c. \quad \&c. \quad \&c. \quad \&c. \quad \&c. \end{cases} \quad M \ldots \begin{cases} t^0 s^n, t^0 s^{n-1}, t^0 s^{n-2}, t^0 s^{n-3}, t^0 s^{n-4}, \&c. \\ t^1 s^{n-1}, t^1 s^{n-2}, t^1 s^{n-3}, t^1 s^{n-4}, \&c. \\ t^2 s^{n-2}, t^2 s^{n-3}, t^2 s^{n-4}, \&c. \\ t^3 s^{n-3}, t^3 s^{n-4}, \&c. \\ t^4 s^{n-4}, \&c. \\ \&c. \end{cases}$$

le ſecond rang horizontal, tous les produits de R par t^1; le troiſieme rang horizontal, tous les produits de R par t^2, & ainſi de ſuite. Or ſi l'on retranche de ce quarré, tous les produits qui ſont au-deſſus de la puiſſance n, il eſt viſible que ce ſeront, 1° le premier terme du ſecond rang horizontal, 2° les deux premiers termes du troiſieme rang horizontal, 3° les trois premiers termes du quatrieme rang, 4° les quatre premiers termes du cinquieme rang, & ainſi de ſuite de rang en rang, qui ſeront retranchés, enſorte que le Quarré algébrique N ſe trouvera réduit au Triangle marqué par (M); d'où il ſuit que ce Triangle contiendra tous les produits des puiſſances deſcendantes de s par les puiſſances réciproquement aſcendantes de t, qui n'excedent pas le n^e degré.

Mais il eſt évident que tous les produits qui compoſent le Triangle algébrique (M), ſe trouvent dans l'équation (D) formée par la multiplication des termes des ſuites A & B qui ſe correſpondent ſuivant l'expoſé de ce Lemme.

$$(D)\ldots\ s^n + \overline{qt + \alpha} \times s^{n-1} + \overline{\beta t^2 + \gamma t + \delta} \times s^{n-2} + \overline{\varepsilon t^3 + \eta t^2 + \lambda t + \mu} \times s^{n-3} + \overline{\nu t + \rho t^3 + \pi t^2 + \varphi t + \sigma} \times s^{n-4} + \&c. = 0.$$

Car 1°. Le produit, qui compoſe la premieré colomne perpendiculaire du triangle M, ſe trouve compoſer le premier terme de l'équation (D). 2°. Tous les produits de la ſeconde colomne perpendiculaire du triangle M, ſont dans le ſecond terme de l'équation (D). 3°. Tous les produits de la troiſieme colomne de M, ſont dans le troiſieme terme de la même équation (D). 4°. Tous les produits de la quatrieme colomne ſont dans ſon quatrieme terme, & ainſi de ſuite. Donc tous les produits des puiſſances deſcendantes de s, par les puiſſances aſcendantes de t, qui n'excedent pas le n^e degré, ſe trouvent dans l'équation (D) multipliés ſucceſſivement par les coëfficiens conſtans 1, q, α, β, γ, δ, ε, η, λ, &c. *Ce qu'il falloit prouver.*

COROLLAIRE.

XXVII. Il ſuit de-là que l'équation marquée (D) eſt toujours du n^e degré, & ne fau-

ſauroit être d'un degré ſupérieur ou inférieur; car 1° les produits des variables s & t, dont elle eſt compoſée, ne ſauroient exceder le n^e degré (par l'Article précédent), donc elle ne peut être d'un degré ſupérieur à n; 2° parmi les produits des mêmes variables s & t, il y en aura toujours pluſieurs qui ſeront du degré n; donc elle ne ſauroit être d'un degré inférieur à n, donc elle eſt toujours du n^e degré. *C. Q. F. P.*

LEMME II.

XXVIII. *Si les coëfficiens* q, α, β, γ, δ, ε, η, &c. *de l'équation marquée par* (D) *dans les deux Articles précédens, portent avec eux leurs ſignes* + *ou* −, *& ſi on les regarde, quoique conſtans, comme des coëfficiens indéterminés, c'eſt-à-dire, indifferens à être de telle ou de telle grandeur conſtante; je dis que cette équation* (D) *eſt de toutes les équations du* n^e *degré, qui n'envelopent que deux inconnues, celle qui eſt la plus générale.*

Toutes les équations imaginables du n^e degré, dans leſquelles il n'y a que deux variables, peuvent ſe rapporter à l'équation (*D*), ſi l'on peut comparer tous les termes de ces équations particulieres un à un, avec ceux de l'équation (*D*) qui leur correſpondent: or cette comparaiſon de terme à terme, uſitée depuis M. Deſcartes, qui eſt le premier qui l'ait miſe en pratique, ſera toujours poſſible entre toutes les équations imaginables du n^e degré, & celle que l'on a marquée (*D*) dans les Articles précédens; car, 1°. Tous les pro-

 duits

duits possibles des puissances descendantes depuis n jusqu'à o, de la variable s, & des puissances ascendantes, depuis o jusqu'à n de la variable t (à l'exception néanmoins de ceux qui sont d'un degré plus élevé que la grandeur n) se rencontrent dans l'équation (D); cela est évident par l'Article 26. Or les termes dont les équations particulieres du degré n sont composées, ne peuvent être, quant à leurs variables, que des produits des puissances descendantes d'une variable comme s & des puissances ascendantes d'une autre variable comme t, qui n'excedent point le n^e degré. Donc tous les termes, de ces équations particulieres du n^e degré, auront leurs semblables dans l'équation (D), quant à leurs grandeurs variables. Donc, par rapport à ces variables, ils pourront être comparés avec les termes de l'équation (D). 2°. Il en sera de même par rapport aux grandeurs constantes qui multiplieront les termes des équations particulieres: car les coëfficiens q, α, ζ, γ, δ, ϵ, η, &c. de l'équation (D) étant indifferens à recevoir les signes + ou −, & en même tems indéterminés à être de telle ou telle grandeur, peuvent être comparés un à un avec les coëfficiens déterminés des équations particulieres. Donc tous les termes des équations particulieres du degré n peuvent être comparées, soit par rapport à leurs quantités variables, soit par rapport à leurs quantités constantes, avec les termes de l'équation (D), suivant la méthode de comparaison si usitée dans l'Analyse. Donc toutes les équations particulieres du degré n, dans lesquel-

quelles il n'y a que deux inconnues, peuvent se rapporter à l'équation (D). Donc cette équation est de toutes les équations du n^e degré, qui ne renferment que deux variables, celle qui est la plus générale. *Ce qu'il falloit démonter.*

COROLLAIRE I.

XXIX. Donc, 1°. l'équation marquée ici par ($1D$) est de toutes les équations indéterminées du premier degré, qui ne renferment que deux inconnues, celle qui est la plus générale, & à laquelle toutes les autres peuvent se rapporter.

$$(1D)\ldots s^1 + \overline{qt + \alpha} \times s^0 = 0.$$

2°. L'équation marquée ($2D$) est de toutes les équations du second degré, qui n'ont que deux variables, celle qui est la plus générale.

$$(2D)\ldots s^2 + \overline{qt + \alpha} \times s^1 + \overline{\beta t^2 + \gamma t + \delta} \times s^0 = 0.$$

3°. L'équation marquée ($3D$) est de toutes les équations du troisieme degré, qui ne renferment que deux variables ou inconnues, celle qui est la plus générale.

$$(3D)\ldots s^3 + \overline{qt + \alpha} \times s^2 + \overline{\beta t^2 + \gamma t + \delta} \times s^1 + \overline{\varepsilon t^3 + \eta t^2 + \lambda t + \mu} \times s^0 = 0.$$

4°. L'équation marquée ici par ($4D$) est de toutes les équations indéterminées du quatrieme degré, qui n'ont que deux inconnues variables, celle qui est la plus générale.

$$(4D)\ldots s^4 + \overline{qt + \alpha} \times s^3 + \overline{\beta t^2 + \gamma t + \delta} \times s^2 + \overline{\varepsilon t^3 + \eta t^2 + \lambda t + m} \times s^1 + \overline{\nu t^4 + \rho t^3 + \pi t^2 + \varphi t + \sigma} \times s^0 = 0.$$

5°. L'é-

5°. L'équation marquée (5 D) eſt de toutes les équations indéterminées du cinquieme degré, celle qui eſt la plus générale.

$$(5D)\ldots s^5 + \overline{qt + \alpha} \times s^4 + \overline{\beta t^2 + \gamma t + \delta} \times s^3 + \overline{\epsilon t^3 + \eta t^2 + \lambda t + \mu} \times s^2 + \overline{\nu t^4 + \rho t^3 + \pi t^2 + \phi t + \sigma} \times s^1 + \overline{At^5 + Bt^4 + Ct^3 + Dt^2 + Et + F} \times s^0 = 0.$$

Tout cela eſt une ſuite néceſſaire du Lemme précédent, & de l'Article 26, leſquels donneront pareillement les Equations générales pour les 6e, 7e, 8e & 9e degrés, & enfin pour tel degré qu'on voudra.

COROLLAIRE II.

XXX. Il ſuit encore du Lemme précédent, que l'équation marquée (D) exprime en général la nature de toutes les lignes algébriques du n^e ordre.

$$(D)\ldots s^n + \overline{qt + \alpha} \times s^{n-1} + \overline{\beta t^2 + \gamma t + \delta} \times s^{n-2} + \overline{\epsilon t^3 + \eta t^2 + \lambda t + \mu} \times s^{n-3} + \overline{\nu t^4 + \rho t^3 + \pi t^2 + \phi t + \sigma} \times s^{n-4} + \&c. = 0;$$

Car il n'y a point de ligne particuliere du n^e ordre, dont la nature ne puiſſe être exprimée par une équation du n^e degré : or il n'y a point d'équation du n^e degré qui ne puiſſe ſe rapporter à l'équation (D) *. Donc il n'y a point de ligne particuliere du n^e ordre, dont la nature ne puiſſe ſe rapporter à l'équation (D)

* Art. 28.

(D) ; donc cette équation exprime en général la nature de toutes les lignes algébriques du n^e degré.

COROLLAIRE III.

XXXI. Donc l'équation marquée ($4D$) exprime la nature de toutes les lignes algébriques du quatrieme ordre.

$$(4D)\ldots\ s^4 + \overline{qt+\alpha} \times s^3 + \overline{\beta t^2 + \gamma t + \delta} \times s^2 + \overline{\varepsilon t^3 + \eta t^2 + \lambda t + \mu} \times s + \overline{\nu t^4 + \rho t^3 + \pi t^2 + \varphi t + \sigma} = 0.$$

C'eſt une ſuite néceſſaire du Lemme ſecond & du Corollaire précédent *; & il eſt inutile d'ajouter qu'on aura de même les Equations générales pour les Lignes du 5me, 6me, 7me & 8me ordre, & enfin pour tel ordre qu'on voudra, d'autant que cela ſe déduit trop clairement des Art. 28 & 29.

REMARQUE.

XXXII. Il eſt aiſé de s'appercevoir, 1°. Que le nombre des termes des Equations générales marquées par ($1D$), ($2D$), ($3D$), ($4D$), ($5D$), &c. de l'Article 29, ſuit la progreſſion marquée ici par (MM)

$$(MM)\ldots\ \overline{1+2},\ \overline{1+2+3},\ \overline{1+2+3+4},\ \overline{1+2+3+4+5},\ \overline{1+2+3+4+5+6},\ \overline{1+2+3+4+5+6+7},\ \&c.$$

Enſorte que la premiere équation ($1D$), qui

* Art. 30.

qui eſt pour les lignes du premier ordre, eſt compoſée de trois termes; la ſeconde ($2\,D$), qui eſt pour les lignes du ſecond ordre, eſt compoſée de ſix termes; la troiſieme ($3\,D$), qui eſt pour les lignes du troiſieme ordre, eſt compoſée de dix termes; la quatrieme ($4\,D$) eſt compoſée de quinze termes, & ainſi des autres à l'infini. 2°. Que la progreſſion (MM) eſt la ſuite des nombres triangulaires, en commençant par le ſecond. D'où il ſuit que n étant pris pour le nombre qui exprime le degré d'une Equation générale quelconque, le nombre triangulaire, qui correſpond dans le Triangle arithmétique de M. Paſcal au nombre naturel $n+2$, donne toujours le nombre des termes qui doit être dans l'Equation générale d'une ligne du n^e ordre lorſqu'elle eſt complete. Or on ſait que le nombre triangulaire, qui correſpond au nombre naturel $n+2$, eſt égal à $\frac{n+2.\ n+1.}{2}$; donc cette quantité $\frac{n+2.\ n+1.}{2}$ exprime toujours le nombre des termes de l'Equation générale des lignes du n^e ordre, lorſqu'elle eſt complete. 3°. Il eſt aiſé de voir que le nombre des coëfficiens q, α, β, γ, δ, ε, &c. dans chaque Equation générale, eſt égal au nombre des termes de l'équation moins un (puiſque nous n'en avons point donné juſqu'ici au premier terme); d'où il ſuit que le nombre des coëfficiens de l'Equation générale des lignes du n^e ordre eſt $\frac{n+2.\ n+1.}{2} - 1 = \frac{nn+3n}{2}$.

Ce

Ce que M. Stirling a remarqué avant nous, page 4 de son Traité, imprimé à Oxfort en 1717.

PROPOSITION I.

THEOREME.

XXXIII. *Une ligne du* n^e *ordre peut être rencontrée par une ligne droite en autant de points qu'il y a d'unités dans* n; *& ne le sauroit être, par la même droite, en un plus grand nombre.*

DEMONSTRATION.

Soit sur un plan une ligne *ZMMNX2mV* * de l'ordre *n*, dont l'axe soit *GQ*, & une ligne droite *GM* qui coupe la ligne *ZMm* en un point comme *M*: je dis que cette droite peut couper la ligne *ZMm* en autant d'autres points 2 *M*, 3 *M*, 4 *M*, 5 *M*, &c. qu'il y a d'unités dans $n-1$, c'est-à-dire, en autant de points qu'il y a d'unités dans *n*, en y comprenant le point *M*.

Car ayant pris sur *GQ* la partie *GI* = à l'unité arbitraire, & après avoir mené du point *I* la droite *IK*, faisant avec l'axe *GQ* un angle quelconque *KIG*; l'angle *KGI* étant connu par la supposition, on voit qu'il y a dans le triangle *IKG* deux angles & un côté *GI* qui sont connus; donc les deux autres côtés *IK* & *KG* seront connus. Donc après avoir pris *GI* = 1, on peut encore

M 6 pren-

* Fig. 21.

prendre $IK = b$, quantité connue & déterminée. Donc le rapport des ordonnées de la droite GM aux abſciſſes GQ (en nommant y ces ordonnées) ſera $y = bt$.

Mais la courbe ZMm étant du n^e ordre, le rapport de ſes ordonnées MQ (s) aux abſciſſes GQ (z) de ſon axe eſt exprimé par l'équation (D) *

$$(D) \ldots s^n + \overline{qt + \alpha} \times s^{n-1} + \overline{\beta t^2 + \gamma t + \delta} \times s^{n-2} + \overline{\varepsilon t^3 + \eta t^2 + \lambda t + \mu} \times s^{n-3} + \overline{\nu t^4 + \xi t^3 + \pi t^2 + \varphi t + \sigma} \times s^{n-4} + \&c. = 0$$

dans laquelle les coëfficiens q, α, β, γ, δ, ε, &c. ſont des grandeurs conſtantes, mais indéterminées à être de telle ou telle valeur, & à être affectées de tel ou tel ſigne.

Or toutes les fois que la droite GM rencontrera la courbe ZMm, les ordonnées (y) de cette droite QM deviendront égales aux ordonnées QM de la courbe ZMm, par conſéquent on aura QM (s) $= y = bt$; & en ſubſtituant dans l'équation (D) au lieu de (s) cette valeur bt (pour avoir la valeur des abſciſſes GQ (t) dans les endroits où la droite GM rencontre la courbe ZMm), on aura l'égalité marquée ici par (K), dont les racines donneront les valeurs des abſciſſes GQ aux points où la droite GM & la courbe ZMm ſe rencontrent.

(K)

* Art. 27. & 28.

$$(K)\left\{\begin{array}{l}+h^{n}\\+qh^{n-1}\\+\beta h^{n-2}\\+\varepsilon h^{n-3}\\+\nu h^{n-4}\\+\&c.\end{array}\right\}t^{n}\left.\begin{array}{l}+\alpha h^{n-1}\\+\gamma h^{n-2}\\+\eta h^{n-3}\\+\rho h^{n-4}\\+\&c.\end{array}\right\}t^{n-1}\left.\begin{array}{l}+\delta h^{n-2}\\+\lambda h^{n-3}\\+\pi h^{n-4}\\+\&c.\end{array}\right\}t^{n-2}\left.\begin{array}{l}+\mu h^{n-3}\\+\varphi h^{n-4}\\+\&c.\end{array}\right\}t^{n-3}\left.\begin{array}{l}+\sigma h^{n-4}\\+\&c.\end{array}\right\}t^{n-4}+\&c.=0.$$

Or il eſt viſible qu'il peut y avoir dans cette égalité autant de racines réelles qu'il y a d'unités dans l'expoſant n du premier terme, ſans qu'il puiſſe y en avoir un plus grand nombre; donc il peut y avoir autant d'abſciſſes GQ, $G2Q$, $G3Q$, $G4Q$, &c. communes à la droite GM & à la courbe ZMm, qu'il y a d'unités dans n, & il ne ſauroit y en avoir davantage. Donc la ligne droite GM peut couper la courbe ZMm du n^e ordre en autant de points qu'il y a d'unités dans n, & ne ſauroit la couper en un plus grand nombre. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

XXXIV. Donc, 1°. les lignes du ſecond ordre, c'eſt-à-dire, les ſections coniques, peuvent être rencontrées en deux points par une même ligne droite,

ſans pouvoir l'être en un plus grand nombre, ce que l'on ſait d'ailleurs être vrai.

2°. Les lignes du troiſieme ordre peuvent être rencontrées en trois points par une même ligne droite, ſans pouvoir l'être en un plus grand nombre de points.

3°. Les lignes du quatrieme ordre peuvent être rencontrées en quatre points par une même ligne droite, & ne ſçauroient l'être en un plus grand nombre.

4°. Celles du cinquieme ordre peuvent être rencontrées en cinq points par une même ligne droite, celles du ſixieme ordre en ſix points, celles du ſeptieme en ſept points, & ainſi des autres à l'infini.

COROLLAIRE II.

XXXV. Si par un point *M* ſimple *, double, triple, quadruple, &c. d'une ligne quelconque *ZMN*, on a mené une droite *MG* tangente de la courbe en ce point *M*, laquelle étant prolongée ait été rencontrée en *G* ſous un angle connu *MGQ* par une autre droite *GQ*, ſur laquelle on ait abaiſſé de tous les points *M*, *N*, *Z*, de la courbe *ZMN*, des droites paralleles entre elles comme *MQ*, *NQ*, &c. faiſant avec *GQ* des angles connus *MGQ* : Il eſt viſible,

1°. Qu'en nommant les abſciſſes *GQ* (t) & les ordonnées *QM* ou *QN* (s), le rapport des abſciſſes aux ordonnées ſera exprimé en général par l'équation (*D*) †, ſuppoſé

* Fig. 22. † Art. 30.

sé que la courbe soit une ligne algébrique du n^{me} ordre.

$$(D) \ldots s^n + \overline{qt + \alpha} \times s^{n-1} + \overline{\beta t^2 + \gamma t + \delta} \times s^{n-2} + \overline{\epsilon t^3 + \eta t^2 + \lambda t + \mu} \times s^{n-3} + \overline{\nu t^4 + \varrho t^3 + \pi t^2 + \phi t + \sigma} \times s^{n-4} + \&c. = 0.$$

2°. Il n'est pas moins évident que GI étant prise pour l'unité arbitraire, & IK ligne droite connue (puisque dans le triangle IGK il y a deux angles IGK, KGI, & un côté IG qui sont donnés) IK, dis-je, étant nommée b, l'égalité marquée par (K) donnera les valeurs des abscisses GQ, $G2Q$, &c. communes à la droite GM & à la courbe ZMN, aux points où cette droite rencontre la courbe.

$$(K) \left\{\begin{matrix} + b^n \\ + qb^{n-1} \\ + \beta b^{n-2} \\ + \epsilon b^{n-3} \\ + \nu b^{n-4} \\ + \&c. \end{matrix}\right\} t^n \left.\begin{matrix} + \alpha b^{n-1} \\ + \gamma b^{n-2} \\ + \eta b^{n-3} \\ + \rho b^{n-4} \\ + \&c. \end{matrix}\right\} t^{n-1} \left.\begin{matrix} + \delta b^{n-2} \\ + \lambda b^{n-3} \\ + \pi b^{n-4} \\ + \&c. \end{matrix}\right\} t^{n-2} \left.\begin{matrix} + \mu b^{n-3} \\ + \phi b^{n-4} \\ + \&c. \end{matrix}\right\} t^{n-4} + \&c. = 0.$$

3°. Il

3°. Il est certain aussi * qu'il y aura dans cette égalité au moins deux racines égales, puisqu'on a supposé la droite GM tangente en M de la courbe ZMN : si le point touchant M de la courbe est une inflexion de la seconde espece, il y aura, dans l'égalité (K) quatre racines égales entre elles †; si au point touchant M il y a une inflexion de la quatrieme espece, l'égalité (K) aura six racines égales: & ainsi des autres points d'inflexion invisibles à l'infini.

4°. Si le point touchant M est une inflexion ordinaire, il y aura ⊥, dans l'égalité marquée par (K), trois racines égales: si le point d'inflexion est de la troisieme espece, il y aura cinq racines égales dans l'égalité (K); si ce point d'inflexion est de la cinquieme espece, il y aura dans l'égalité (K) sept racines égales, & ainsi des autres points d'inflexion visibles d'especes supérieures.

5°. Si le point touchant M est un point double de la premiere espece, il y aura ‡ dans l'égalité marquée par (K) trois racines égales & de même signe: si la branche touchée par la droite GM est accompagnée d'une inflexion de la seconde espece au point double M, il y aura dans l'égalité (K) cinq racines égales & de même signe: si l'inflexion est de la quatrieme espece, il y aura sept racines égales & de même signe, & ainsi des autres points d'inflexion invisibles à l'infini qui se confondroient avec un point double.

6°. Si

* *Art.* 8. *n.* 2. † *Art. id. n.* 4.
⊥ *Art. id. n.* 3. ‡ *Art.* 19. *n.* 1.

6°. Si le point touchant *M* eſt un point double de la ſeconde ou troiſieme eſpece, il y aura * dans l'égalité marquée par (*K*) quatre racines égales & de même ſigne, ſuppoſé que l'inflexion de la branche touchée par la droite *GM* ſoit une inflexion de la premiere eſpece. Si cette inflexion eſt de la troiſieme eſpece, il y aura dans l'égalité marquée par (*K*) ſix racines égales entre elles: & ainſi des autres points d'inflexion viſibles d'eſpeces ſupérieures, qui ſe confondent avec des points doubles.

7°. Si le point touchant *M* eſt un point triple de la premiere eſpece, il y aura † dans l'égalité (*K*) quatre racines égales & de même ſigne, ſix, huit, dix, &c. ſi ce point triple eſt accompagné d'une inflexion inviſible de la branche touchée par la droite *GM*. Si la branche touchée par la droite *GM* a une inflexion viſible au point triple *M*, c'eſt-à-dire, ſi le point triple *M* eſt de la ſeconde, troiſieme ou quatrieme eſpece, l'égalité (*K*) aura cinq, ſept ou neuf racines égales & de même ſigne, ſelon que cette inflexion, qui ſe confond avec le point triple *M*, ſera de la premiere, troiſieme ou cinquieme eſpece.

8°. Si le point touchant *M* eſt un point quadruple de la premiere eſpece, il y aura ‡ dans l'égalité marquée par (*K*) au moins cinq racines égales & de même ſigne, ou ſept, ou neuf, ou onze, ſelon que le point touchant *M* ſera ſans inflexion, ou avec une inflexion de la ſeconde, quatrieme, ou ſixieme

* *Art. id. n.* 2. † *Art.* 19. *n.* 2. ‡ *Art. id. n.* 3.

me espece, & ainsi de suite pour les autres inflexions invisibles qui pourroient accompagner le point quadruple; si le point touchant *M* est un point quadruple accompagné d'un inflexion visible de la branche touchée par *GM*, c'est-à-dire, si le point quadruple *M* est de la seconde, troisieme, quatrieme, ou cinquieme espece, il y aura dans l'égalité marquée par (*K*) au moins six racines égales & de même signe, ou huit, ou dix, ou douze, si l'inflexion qui se trouve au point quadruple est de la troisieme, cinquieme, ou septieme espece.

Enfin il est aisé de voir combien il doit y avoir de racines égales & de même signes dans l'égalité marquée par (*K*), lorsque le point touchant *M* est un point quintuple, sextuple, & ainsi des autres points multiples d'un ordre supérieur.

COROLLAIRE III.

XXXVI. De tout ceci il est aisé de conclurre, 1°. Que les lignes du second ordre ne sauroient avoir ni points d'inflexion, ni points doubles: car quand la ligne *ZMN* est du second ordre, l'égalité (*K*) est du second degré; d'où il suit qu'elle ne sauroit avoir trois racines égales. 2°. Que les lignes du second ordre n'ont ni points triples, ni points quadruples, en un mot, que tous leurs points sont simples. *C'est une vérité connue depuis longtems, mais que j'ai cru devoir remettre devant les yeux pour faire voir la liaison de cette théorie avec les vérités déja connues.*

Co-

COROLLAIRE IV.

XXXVII. Il ſuit encore de l'Art. 35, 1°. Que les lignes du troiſieme ordre peuvent avoir des points d'inflexion de la premiere eſpece, & des points doubles de la premiere eſpece, & par conſéquent des points de rebrouſſement & des points conjugués : mais qu'elles ne ſauroient avoir ni inflexions de la ſeconde, troiſieme ou quatrieme eſpece, ni points doubles de la ſeconde & troiſieme eſpece, ni points triples, ni aucuns points multiples au-deſſus du point double. 2°. Que les lignes du quatrieme ordre peuvent avoir des points d'inflexion de la premiere & ſeconde eſpece, des points doubles de toutes les eſpeces, & des points triples de la premiere eſpece : mais qu'elles ne ſauroient avoir ni points triples de la ſeconde, troiſieme ou quatrieme eſpece, ni point quadruple, ni aucun point multiple ſupérieur au point triple. 3°. Que les lignes du cinquieme ordre peuvent avoir des points quadruples de la premiere eſpece, des points triples de la ſeconde, troiſieme & quatrieme eſpece, & à plus forte raiſon des points triples de la premiere eſpece, des points doubles des trois eſpeces que nous avons marquées, & des inflexions de la premiere, ſeconde & troiſieme eſpece : mais qu'elles ne ſauroient avoir ni points quadruples de la ſeconde, troiſieme, quatrieme ou cinquieme eſpece, ni points quintuples, ni aucun point multiple ſupérieur au point quadruple de la premiere eſpece.

4°. Que

4°. Que les lignes du sixieme ordre peuvent avoir des points quintuples de la premiere espece, ou des points quadruples de la seconde, troisieme, quatrieme & cinquieme espece; & à plus forte raison des points quadruples de la premiere espece, des points triples & des points doubles de toutes les especes. 5°. Enfin que les lignes de l'ordre exprimé par l'exposant n peuvent avoir des inflexions dont l'espece soit exprimée par $n-2$; à plus forte raison de celles dont l'espece est exprimée par $n-3$, $n-4$, $n-5$, &c. Qu'elles peuvent avoir des points multiples dont la multiplicité est exprimée par $n-1$, mais seulement de la premiere espece: qu'elles peuvent avoir de toutes les especes de points multiples, dont la multiplicité est exprimée par $n-2$, $n-3$, $n-4$, &c. mais qu'elles ne sauroient avoir de points multiples dont la multiplicité soit exprimée par n.

COROLLAIRE V.

XXXVIII. Il n'est pas moins évident que les lignes algébriques de l'ordre n peuvent être coupées par leurs tangentes en un point simple M, ou par leurs sécantes en un point double, en autant de points simples, autres que le point d'attouchement, ou autres que le point double, en autant de points, dis-je, qu'il y a d'unités dans $n-2$. Ainsi 1°. les lignes du second ordre, ou les sections coniques, ne sauroient être coupées par leurs tangentes en aucun point, vérité connue depuis longtems. 2°. Les tangentes en un point simple,

simple, ou les sécantes en un point double des lignes du troisieme ordre, peuvent couper leurs courbes en un autre point. 3°. Les tangentes en un point simple, ou les sécantes en un point double des lignes du quatrieme ordre, peuvent couper leurs courbes en deux autres points simples, ou en un autre point double. D'où il suit que les lignes du quatrieme ordre peuvent avoir deux points doubles sur la même ligne droite sécante de la courbe à l'un & à l'autre point double.

COROLLAIRE VI.

XXXIX. Les lignes algébriques du n^e ordre peuvent être coupées par leurs asymptotes rectilignes en autant de points qu'il y a d'unités dans $n-2$; c'est encore une suite de l'Art. 35. Ainsi 1°. Les asymptotes rectilignes des lignes du troisieme ordre ne peuvent couper leur courbe qu'en un seul point; Celles des lignes du quatrieme ordre ne peuvent couper leur courbe qu'en deux points; Celles des lignes du cinquieme en trois points; Celles du sixieme en quatre, & ainsi de suite. 2°. Les lignes du quatrieme ordre peuvent être touchées en un point simplement simple, ou coupées en un point double par leurs asymptotes rectilignes; Celles du cinquieme ordre peuvent être touchées en un point d'inflexion de la premiere espece, ou en un point double, ou bien coupées en un point triple par leurs asymptotes rectilignes; Celles du sixieme ordre peuvent être touchées en un point d'inflexion de la seconde espece, ou en un point triple, ou coupées en un point qua-

quadruple par leurs aſymptotes rectilignes ; & ainſi des autres.

COROLLAIRE VII.

XL. Il ſuit encore des Articles 33 & 35, que les tangentes en un point d'inflexion de la premiere eſpece, ou les tangentes en un point double de la premiere eſpece, ou les ſécantes en un point triple des lignes algébriques du n^e ordre peuvent couper leurs courbes en autant d'autres points differens du point d'inflexion, ou du point double, ou du point triple, qu'il y a d'unités dans $n-3$. D'où il ſuit, 1°. Que les tangentes au point d'inflexion, ou au point double d'une ligne du troiſieme ordre, ne ſauroient rencontrer cette ligne en d'autres points. 2°. Que les tangentes au point d'inflexion, ou au point double de la premiere eſpece, ou bien les ſécantes au point triple d'une ligne du quatrieme ordre, ne peuvent que couper cette ligne en un autre point ſimple, ſans pouvoir la toucher en un autre point ſimplement ſimple, ni la couper en un autre point double, ni lui être aſymptote. 3°. Que les tangentes au point d'inflexion de la premiere eſpece, ou les tangentes au point double de la premiere eſpece, ou les ſécantes en un point triple des lignes du cinquieme ordre, peuvent couper leur courbe en deux autres points ſimples, ou en un autre point double, ou la toucher en un autre point ſimplement ſimple.

Co-

COROLLAIRE VIII.

XLI. Il fuit encore des mêmes Articles 33 & 35, que la tangente à l'inflexion de la feconde efpece, & les tangentes en un point double de la feconde ou troifieme efpece, ou bien les tangentes en un point triple, ou enfin les fécantes en un point quadruple des lignes algébriques du n^e ordre, ne peuvent couper leur courbe qu'en autant d'autres points qu'il y a d'unités dans $n-4$. D'où il fuit 1°. Que la tangente à l'inflexion de la feconde efpece, ou les tangentes en un point double de la feconde & troifieme efpece, ou bien les tangentes en un point triple des lignes du quatrieme ordre, ne fauroient rencontrer leur courbe en aucun autre point. 2°. Que la tangente à l'inflexion de la feconde efpece, ou les tangentes en un point double de la feconde & troifieme efpece, ou les tangentes en un point triple, ou les fécantes en un point quadruple des lignes du cinquieme ordre, peuvent couper leur courbe en un autre point fimple. 3°. Que les tangentes en ces différens points des lignes du fixieme ordre peuvent couper leur courbe en deux autres points fimples, ou en un autre point double, ou les toucher en un autre point fimplement fimple.

COROLLAIRE IX.

XLII. Il n'eft pas moins évident que les lignes du troifieme ordre ne fauroient avoir qu'un

qu'un ſeul point double. Car ſoient *M* & *N** ces deux points doubles d'une ligne du troiſieme ordre: par les premiers principes de la Géometrie, ces deux points peuvent être unis par une même ligne droite *MN*. Soit prolongée cette droite jusqu'à ce qu'elle rencontre en *G* une autre droite *GQ*, que l'on prendra pour l'axe de la courbe: cela fait, de chaque point double *M* & *N*, on abaiſſera ſur cet axe les ordonnées *MQ*, *NP*, alors l'abſciſſe *GQ* ſera au moins deux fois commune à la courbe *ZMN* & à la droite *GN*; de même l'abſciſſe *GP* ſera au moins deux fois commune à la même courbe *ZMN* & à la même droite *GN*, enſorte que dans l'égalité marquée par (*K*) dans l'Art. 33, il y aura deux racines égales pour l'abſciſſe *GQ*, & deux autres racines égales pour l'abſciſſe *GP*. Donc il y aura quatre racines dans l'égalité marquée par (*K*): or il implique qu'il y ait quatre racines dans cette égalité, lorſque la courbe *ZMN* n'eſt qu'une ligne du troiſieme ordre (puiſque cette égalité n'eſt alors que du troiſieme degré, n y étant $=3$). Donc il implique qu'il y ait deux points doubles dans une même ligne du troiſieme ordre. Donc, &c.

COROLLAIRE X.

XLIII. Une ligne du quatrieme ordre ne ſauroit avoir qu'un ſeul point triple; car s'il étoit poſſible qu'elle en eût deux, on prouveroit, par un raiſonnement ſemblable à celui de l'Article précédent, que l'égalité marquée

* *Fig.* 24.

quée par (K) dans l'Art. 33, pourroit avoir six racines, lorsque la courbe, dont GM est sécante, n'est que du quatrieme ordre, ce qui impliqueroit contradiction, puisque l'égalité (K) ne sauroit être alors du quatrieme degré. Donc, &c.

COROLLAIRE XI.

XLIV. On prouvera de même que les lignes du quatrieme ordre qui ont un point triple, ne sauroient avoir de points doubles; car si cela étoit possible, il s'ensuivroit que l'égalité marquée par (K) dans l'Art. 33, auroit cinq racines, ce qui impliqueroit contradiction, puisque cette égalité ne sauroit être que du quatrieme degré, lorsque la courbe n'est qu'une ligne du quatrieme ordre.

SCHOLIES.

XLV. Il sera aussi aisé de prouver, 1°. Que les lignes du 5me ordre ne peuvent avoir qu'un seul point quadruple, & que celles qui ont un point quadruple ne sauroient avoir ni points triples, ni points doubles. 2°. Que les lignes du sixieme ordre ne peuvent avoir qu'un seul point quintuple, & que celles qui ont un point quintuple ne sauroient avoir ni points quadruples, ni points triples, ni points doubles. 3°. Enfin que les lignes algébriques de l'ordre n, ne peuvent avoir qu'un seul point multiple, dont la multiplicité soit exprimée par $n-1$; & que celles qui ont un point multiple, dont la multiplicité est exprimée par $n-1$, ne

sauroient avoir d'autres points multiples.

Enfin, suivant la même théorie, on prouvera encore, 1°. Que les lignes du cinquieme ordre, qui ont des points triples, peuvent avoir des points doubles. 2°. Que les lignes du sixieme ordre, qui ont des points quadruples, peuvent avoir des points doubles, & ne sauroient avoir de points triples; mais que celles de cet ordre qui ont des points triples, peuvent avoir des points doubles. 3°. Que les lignes du septieme ordre, qui ont des points quintuples, peuvent avoir des points doubles, & ne sauroient avoir ni points quadruples, ni points triples. 4°. Enfin que les lignes du n^e ordre, qui ont des points multiples de l'ordre $n-2$, ne peuvent avoir que des points doubles: que les lignes de l'ordre n qui ont des points multiples, dont la multiplicité est exprimée par $n-3$, ne peuvent avoir que des points triples & des points doubles: que celles de cet ordre qui ont des points multiples de l'ordre $n-4$, ne peuvent avoir que des points quadruples, ou des points triples, ou des points doubles; & ainsi des autres à l'infini, tous les autres points de ces courbes étant des points simples.

REMARQUE.

XLVI. Les differentes tangentes en ces points doubles, triples, quadruples, &c. se trouvent toujours par la méthode des Tangentes que M. le Marquis de l'Hôpital a expliquée dans l'Analyse des Infiniment-petits; mais

mais il faut y appliquer les règles de differentiation contenues dans l'Article 163 de cette même Analyse, dans un Mémoire du célébre M. Bernoulli, imprimé dans les Journaux de Leipsik de l'année 1704, & dans differens Ouvrages d'un des principaux Géometres * de cette Compagnie, imprimés, les uns dans les Journaux des Savans, les autres dans les Mémoires de l'Académie, pour les cas auxquels le numerateur & le dénominateur de la fraction qui exprime le rapport de l'ordonnée à la soutangente deviennent nuls: car cela arrive, lorsque le point, dont on cherche la tangente, est double, triple, quadruple, &c. & l'on est obligé de differentier deux fois selon ces méthodes, pour trouver le rapport de l'ordonnée à la soutangente, lorsque le point est double: trois fois, lorsqu'il est triple: quatre fois, lorsqu'il est quadruple, & ainsi de suite pour les autres points multiples. M. de Fontenelle en a donné la raison dans son excellent Traité de la Géometrie de l'Infini, Art. 1266 & 1267; & on peut même la déduire des principes qui ont été établis dans ce Mémoire: ainsi je me contente de renvoyer aux Ouvrages des Géometres dont je viens de parler.

PROPOSITION II.

THEOREME.

XLVII. *Les lignes algébriques du n^e ordre* †, *pen-*

* M. Saurin. † Fig. 21.

peuvent être coupées par une ligne droite, parallele à leur axe, en autant de points qu'il y a d'unités dans le plus haut exposant de la variable (t) *qui dénote les abscisses* GQ *de son axe* G 5 q; *& par une ligne droite* QM *parallele à son ordonnée principale* GL, *en autant de points qu'il y a d'unités dans le plus haut exposant de la variable* (s) *qui dénote les abscisses* GE *de cette ordonnée principale* GL.

Cette Proposition se démontre de la même maniere que celle de l'Article 33, & on en déduit aisément les mêmes consequences: ainsi je ne m'y arrête pas davantage, pour ne pas tomber dans des répétitions.

DEFINITION XV.

XLVIII. Je nommerai dans la suite *racine double*, celle qui dans une égalité quelconque est équivalente à deux racines de cette égalité: telle est la racine $(-a)$ dans l'égalité du troisieme degré $x^3 + 4axx + 5aax + 2a^3 = 0$; & *racine simple*, celle qui dans une égalité quelconque n'est point répétée: telle est la racine $(-2a)$ dans cette même égalité du troisieme degré. Je nommerai *racine triple*, celle qui dans une égalité quelconque est équivalente à trois racines de cette même égalité: telle est la racine $(-a)$ dans l'égalité $x^4 + 5ax^3 + 9a^2xx + 7a^3x + 2a^4 = 0$. De même je nommerai *racine quadruple*, celle qui dans une égalité quelconque est équivalente à quatre racines de cette même égalité; & ainsi des autres racines multiples à l'infini.

REMARQUE.

XLIX. Si par un point quelconque M d'une ligne $ZMDMN$, &c. * de l'ordre n, dont la nature est exprimée par l'équation générale de l'Art. 30, marquée par (D) †, on mene deux droites QM, EM, la premiere parallele à l'ordonnée principale GL, la seconde parallele à l'axe GQ, l'une & l'autre prolongées à l'infini, s'il est nécessaire, de part & d'autre du point M, & qui rencontrent, la premiere l'axe GQ en Q, la seconde l'ordonnée principale GL en E: cela fait, si l'on nomme la droite, prise à discretion, GQ (R), & la droite QM ou GE (g), si l'on substitue 1°. dans l'équation marquée par (D), au-lieu de l'indéterminée (t), sa valeur (R), il est visible qu'on aura l'égalité marquée par (L) ‡, dont les racines donneront les points M, $3N$, $2N$, N, &c. où la droite QM coupe la courbe $ZMDMNX2mV$. 2°. Si l'on substitue dans cette même équation, marquée par (D), au-lieu de l'indéterminée (s), sa valeur $GE = g$, il est constant qu'on aura l'égalité marquée par (A) ‡, dont les racines donneront les points M, m, $2m$, $3m$, $4m$, $5m$, &c. où la droite EM rencontre la courbe $ZMDMNX2mV$.

Il est constant aussi que l'abscisse GQ (R) sera une des racines réelles de l'égalité marquée

* Fig. 21. 35. & 36.
† Voyez la Table à la fin de ce Mémoire.
‡ V. la même Table. ‡ V. la même Table.

quée par (A), & que l'abſciſſe GE (g) ſera une des racines réelles de l'égalité marquée par (L), ſi le point M eſt un des points de la courbe $ZMDMNX2mV$, comme on l'a ſuppoſé.

Si l'on a beſoin de tranſporter l'origine des abſciſſes de G en M, il eſt conſtant, par les premiers principes de l'application de l'Algebre à la Géometrie, qu'il n'y a qu'à ſuppoſer $z = t - R$ & $u = s - g$, ou bien $t = z + R$ & $s = u + g$: car en ſubſtituant ces valeurs de z & de s dans l'équation de la courbe marquée par (D), on aura une équation ſemblable à celle que l'on voit dans la Table, marquée par (Δ), dans laquelle les coëfficiens Q, A, B, C, D, E, F, G, &c. ſeront donnés en q, α, β, γ, δ, ϵ, η, λ, &c. & en g & en R. Or il eſt viſible que cette derniere équation exprime encore la nature de la courbe $ZMDMNX2mV$ par rapport à des coordonnées MP, $P\varsigma M$, qui ont leur origine commune en M, & qui ſont paralleles aux premieres GQ, QM.

Si par les points G & M on mene la droite $GM\varsigma M$, il eſt évident, par l'Art. 33, que cette droite peut rencontrer la courbe en autant de points qu'il y a d'unités dans l'expoſant n, en y comprenant les points doubles pour deux points ſimples, les points triples pour trois points ſimples, & ainſi des autres points multiples. Cela ſuppoſé, ſi l'on prend $GI = 1$ & $IK = h$ (en ſuppoſant toujours IK parallele aux ordonnées) on trouvera l'égalité marquée dans la Table par ($2K$) de même qu'on a trouvé ci-devant

* l'é-

* l'égalité marquée par (K): mais à cause des triangles semblables GIK, GQM, on aura ici $b = -\frac{g}{R}$; de plus, puisque les coëfficiens Q, A, B, C; D, E, F, &c. sont donnés en q, α, β, γ, δ, ϵ, &c. & en g & en R, & que g & R sont donnés de même en q, α, β, γ, δ, ϵ, &c. il est visible qu'il n'y aura dans l'égalité ($2K$) aucun coëfficient qui ne soit connu par rapport aux coëfficiens de l'équation primitive marquée par (D).

Maintenant si par le point M, on mène une droite $M\omega$, faisant avec MP un angle quelconque ωMP, mais different de l'angle connu MGQ, cette droite pourra encore rencontrer la courbe $ZMDMNX2mV$ en autant de points qu'il y a d'unités dans l'exposant n, en y comprenant les points doubles pour deux points simples, les points triples pour trois points simples, & ainsi des autres. Cela posé, si l'on prend $Ml = GI = 1$, & si l'on nomme l la droite Il parallele aux ordonnées $P5M$, il est visible que de même qu'on a trouvé dans les Art. 33 & 35, l'égalité marquée par (K). on trouvera ici l'égalité marquée dans la Table par ($3K$), dont les racines réelles donneront les points d'intersection de la courbe & de la droite $M\omega$.

Les choses étant telles qu'on vient de les exposer, il est visible que dans les égalités marquées par ($2K$) & par ($3K$), il y aura un certain nombre de racines réelles égales

* Art. 33.

les à zero, ſelon que le point *M* ſera ou un point ſimple, ou un point multiple, puiſque l'origine des coordonnées *MP* (*z*) *P*5*M* (*u*) eſt en *M*.

COROLLAIRE I.

L. Il ſuit de la Remarque précédente, & de tout ce qu'on a dit juſqu'ici, 1°. Que le point *M* n'eſt qu'un point ſimple de la courbe *ZMNX*2*MV*, lorſque l'une des deux racines *GQ* (*R*) * ou *GE* (*g*) eſt une racine ſimple, la premiere de l'égalité (*A*), la ſeconde de l'égalité marquée par (*L*), ce qui eſt connu de tout le monde. 2°. Que la droite *QM* † eſt tangente, & la droite *EM* ſécante de la courbe au point *M*, lorſque *GE* (*g*) eſt une racine double de l'égalité marquée par (*L*), tandis que *GQ* (*R*) n'exprime qu'une racine ſimple de l'égalité marquée par (*A*). 3°. Qu'au point *M* de la courbe *ZMV* ‡, il y a une inflexion parallele à l'ordonnée principale *GL*, lorſque *GE* (*g*) eſt une racine triple de l'égalité (*L*), tandis que *GQ* (*R*) n'eſt qu'une racine ſimple de l'égalité (*A*). 4°. Qu'au point *M* de la courbe *ZMV* ‡, il y a une inflexion de la ſeconde eſpece à laquelle *QM* eſt tangente, lorſque *GE* (*g*) eſt une racine quadruple de l'égalité (*L*), tandis que *GQ* (*R*) n'eſt qu'une racine ſimple de l'égalité (*A*). 5°. Enfin, il eſt évident que quand *GQ* (*R*) n'exprime qu'u-

* *Voyez la Table à la fin de ce Mémoire.*
† Fig 21. *bis.* ‡ Fig. 22. *bis.* ‡ Fig. 21. *bis.*

qu'une racine simple de l'égalité marquée par (*A*), tandis que *GE* (*g*) exprime une racine multiple quelconque de l'égalité (*L*), il est, dis-je, évident que le point *M* n'est qu'un point simple de la courbe *ZMV*, ou sans inflexion ou avec inflexion visible ou invisible: quand la racine multiple *GE* (*g*) est impaire, le point *M* est avec une inflexion visible; quand elle est paire, il est avec une inflexion invisible.

COROLLAIRE II.

LI. Il suit encore de tout ce qui a été dit jusqu'ici, que le point *M* est un point double, quand *GQ* (*R*) * exprime une racine double de l'égalité (*A*), tandis que *GE* (*g*) exprime une racine double ou plus que double de l'égalité (*L*). 1°. Si *GE* (*g*) n'est qu'une racine double, les droites *EM* & *QM* sont sécantes au point double *M* †. 2°. Si *GE* (*g*) est une racine triple, la droite *EM* demeurant sécante au point double *M*, la droite *QM* est tangente de la courbe en ce même point double *M* ‖. 3°. Si *GE* (*g*) est une racine quadruple, le point double *M* est de la seconde ou troisieme espece, & la droite *QM* est tangente en *M* de la branche qui a une inflexion au point double *M* ‡. 4°. Si *GE* (*g*) est une racine quintuple de l'égalité (*R*), *GQ* (*R*) n'étant toujours qu'une racine double de l'égalité (*A*), le point double *M* est

* *V. la Table à la fin de ce Mémoire.*
† Fig. 25. & 26. ‖ Fig. 27. ‡ Fig. 28.

est de la premiere espece, mais la branche à laquelle QM est tangente en M, a une inflexion de la seconde espece en ce même point double M*, & ainsi des autres.

REMARQUE.

LII. Les points doubles de la premiere espece, dont on a parlé dans l'Article précédent, peuvent être sans rebroussement ou avec rebroussement, ou bien ils peuvent n'être que des ovales infiniment petites. Après s'être assuré par le Corollaire précédent que le point M est un point double la premiere espece, on connoitra si ce point double est ou un point d'intersection, ou un point de rebroussement, ou une ovale infiniment petite, en cherchant les tangentes de la courbe en ce point par la méthode de l'Analyse des Infiniment-petits, jointe aux remarques dont Mrs. Bernoulli, Saurin & de Fontenelle l'ont enrichie: car la seconde differentiation de l'équation de la courbe marquée par (D) donnera une double valeur réelle de $\frac{ds}{dx}$ (c'est-à-dire, un double rapport réel de l'élément de l'ordonnée à l'élément de l'abscisse), si le point double M est un point d'intersection; au-lieu que cette seconde differentiation ne donnera qu'une seule valeur de $\frac{ds}{dx}$, si le point M est un point de rebroussement, parce

* Fig. 27.

ce que les deux tangentes au point double *M* tomberont alors exactement l'une sur l'autre *. Enfin cette seconde differentiation ne donnera que des valeurs imaginaires de $\frac{ds}{dz}$, si le point double *M* est une ovale infiniment petite, parce qu'une ovale infiniment petite ne sauroit avoir de tangentes †. Il n'y a personne qui ne puisse éprouver, par des exemples connus, la vérité de cette règle : ainsi, sans m'arrêter à en donner ici des exemples qui seront assez fréquens dans la suite de ce Traité, je vais continuer cette Théorie.

COROLLAIRE III.

LIII. Il suit encore de tout ce qu'on a dit jusqu'ici, 1°. Que quand *GQ* (*R*) ‡ & *GE* ( ) sont l'une & l'autre des racines triples, la premiere de l'égalité (*A*), la seconde de l'égalité (*L*), il suit, dis-je, que le point *M* est ou un point double auquel *QM* & *EM* sont tangentes, ou un point triple auquel *QM* & *EM* sont sécantes. Dans cette circonstance, il est visible ‡ qu'on connoitra si le point *M* est double ou triple par le moyen de l'égalité marquée (2*K*): car si le point *M* n'est qu'un point double, l'égalité marquée par (2*K*) n'aura que deux racines égales à zero; s'il est triple, elle en aura trois.

* *Art.* 20. & 21. † *Art id.*
‡ *V. la Table à la fin de ce Mémoire, & les Fig.* 29. & 30.
‡ *Art.* 49.

trois. 2°. L'abſciſſe GQ (R) étant toujours une racine triple de l'égalité (A), ſi GE (g) eſt une racine quadruple, quintuple, ſextuple, &c. & que l'égalité $(2K)$ n'ait que deux racines égales à zero, le point M * n'eſt toujours qu'un point double, mais tel que la branche à laquelle QM eſt tangente a toujours une inflexion viſible ou inviſible préciſément au point M où ſe fait l'interſection des deux branches. 3°. L'abſciſſe GQ (R) étant toujours une racine triple de l'égalité (A), & GE (g) une racine quadruple, quintuple, ſextuple, &c. de l'égalité (L), ſi l'égalité $(2K)$ † a trois racines égales à zero, le point multiple M eſt toujours un point triple, auquel EM & GM ſont ſécantes, tandis que QM eſt tangente d'une branche qui n'a point d'inflexion, ſi GE (g) eſt une racine quadruple : ou qui a une inflexion de la premiere eſpece en M ⸸, ſi GE (g) eſt une racine quintuple : ou une inflexion de la ſeconde eſpece en M ‡, ſi GE (g) eſt une racine ſextuple; & ainſi de ſuite.

REMARQUE.

LIV. Après s'être aſſuré, par le Corollaire précédent, que le point M eſt un point triple, on connoitra ſi ce point triple eſt une interſection de trois branches de la courbe, ou s'il eſt accompagné d'un rebrouſſement, ou s'il eſt produit par l'adhéſion d'une ovale

* Fig. 31. & 29. † Fig. 32. ⸸ Fig. 33. ‡ Fig. 32.

le infiniment petite ſur une des branches de la courbe, en differentiant trois fois (ſelon les méthodes de Mrs. Bernoulli & Saurin) l'équation qui exprime la nature de la courbe: car la troiſieme differentiation donnera trois valeurs de $\frac{ds}{dt}$, c'eſt-à-dire, trois valeurs réelles du rapport de l'ordonnée *QM* à la ſoutangente, ſi le point eſt un point d'interſection de trois branches, puiſqu'il y a trois tangentes réelles au point *M* *; mais des trois valeurs réelles de $\frac{ds}{dt}$, il y en aura deux égales entre elles, ſi le point triple *M* eſt accompagné de rebrouſſement, puiſqu'il doit y avoir alors deux des trois tangentes qui tombent exactement l'une ſur l'autre †; enfin la troiſieme differentiation ne donnera qu'une ſeule valeur réelle & deux valeurs imaginaires de $\frac{ds}{dt}$, ſi le point triple *M* eſt produit par l'adhéſion d'une ovale infiniment petite, puiſque dans cette derniere circonſtance il ne doit y avoir qu'une ſeule tangente réelle au point triple *M*, les deux autres devenant imaginaires ‡.

COROLLAIRE IV.

LV. Il ſuit encore de tout ce qui a été dit ci-deſſus: Que quand *GQ* (*R*) & *GE* (*g*)

* *Art.* 22. & 23.   † *Art.* 22. & 23.
‡ *Art. id.*

(g)[a] sont l'une & l'autre des racines quadruples, la premiere de l'égalité (A), la seconde de l'égalité (L), il suit, dis-je, que le point M est 1°. ou un point double de la troisieme espece[b], auquel QM & EM sont tangentes, ou 2°. un point triple[c] auquel QM & EM sont tangentes, ou 3°. un point quadruple auquel QM & EM sont sécantes[d]. Dans ces circonstances il est visible que ce sont les égalités ($2K$) & ($3K$) qui doivent déterminer la nature du point multiple M; car si l'égalité ($2K$) n'a que deux racines égales à zero, il est clair que le point M n'est qu'un point double de la troisieme espece; si cette égalité ($2K$) a trois racines égales à zero, le point M est un point triple; mais si l'égalité ($2K$) a quatre racines égales à zero, le point M peut être, ou un point triple[e], auquel GM seroit tangente, aussi-bien que les droites QM, EM; ou bien un point quadruple[f] auquel GM seroit sécante, aussi-bien que les deux autres droites QM, EM. Dans cette derniere circonstance, si l'égalité ($3K$) a trois racines égales à zero, le point M n'est qu'un point triple; si elle a quatre racines égales à zero, c'est un point quadruple auquel QM, EM, GM & Mu sont sécantes; si l'égalité ($3K$) a cinq racines égales à zero, le point multiple M est encore un point quadruple auquel QM, EM & GM sont sécantes, tandis que Mu est la tangente

a *V. la Table à la fin de ce Mémoire.*
b Fig. 37. c Fig. 38. d Fig. 35.
e Fig. 36. f Fig. 35.

te d'une des branches qui produisent le point quadruple: si l'égalité marquée par (3 *K*) a six racines égales à zero, ou sept, ou huit, ou neuf, &c. le point multiple *M* est toujours un point quadruple auquel *QM*, *EM* & *GM* sont sécantes, & *M* tangente, mais la branche à laquelle *M* est tangente a une inflexion visible ou invisible précisément au point *M* où se fait l'intersection, & c'est une inflexion visible, si les racines de l'égalité (3 *K*) qui sont égales à zero, sont au nombre de six, huit, dix, douze, &c. & c'est une inflexion invisible, si ces égalités sont en nombres impairs, sept, neuf, onze, &c.

SCHOLIE.

LVI. De tout ce qui vient d'être dit, il est aisé de déduire une théorie générale pour connoitre si un point donné *M* d'une ligne algébrique donnée *ZMNX2mV* est 1°. un point simple, double, triple, quadruple, quintuple, &c. 2°. De quelle espece de multiplicité il est: s'il est double de la premiere, seconde ou troisieme espece: s'il est triple de la premiere, seconde, troisieme ou quatrieme espece: s'il est quadruple de la premiere, seconde, troisieme, quatrieme ou cinquieme espece: & ainsi des autres points multiples à l'infini. 3°. Si c'est un nœud, ou un point de rebroussement, ou une ovale infiniment petite; si outre le nœud, il y a un point de rebroussement de deux autres branches, ou s'il y a une ovale infiniment petite adhérante; & ainsi des autres. Mais comme

me les lignes du quatrieme ordre, dont j'ai à traiter ici, ne fauroient avoir ni points triples de la feconde & troifieme efpece, ni points quadruples, ni points quintuples: en un mot, comme les lignes du quatrieme ordre ne peuvent avoir que des points doubles de toutes les efpeces, ou au plus un feul point triple, je m'abftiens de pouffer cette théorie plus loin, perfuadé qu'on doit en voir l'enchainement, & qu'il n'y a perfonne qui ne puiffe déduire, des principes qui viennent d'être établis, toutes les conféquences qui peuvent fervir à cette théorie. Il faudroit allonger extrêmement ce Mémoire pour en faire le détail: cependant avant de le finir, je crois qu'il eft à propos de faire quelques remarques au fujet des points multiples invifibles du premier & du fecond genre, c'eft-à-dire, au fujet des ovales infiniment petites conjuguées, & des ovales infiniment petites adhérantes à une des branches de la courbe.

REMARQUE I.

LVII. On a dit dans la 8e. définition * nombre 3, que l'ovale infiniment petite ou point conjugué devoit être mis au rang des points doubles. Le célébre Chevalier Newton l'a dit auffi dans fon Enumération des lignes du troifieme ordre, & c'eft après ce grand homme que j'ai cru pouvoir le fuppofer. Néanmoins ayant donné des règles dans ce Mémoire, pour reconnoitre les points doubles d'avec les

* *Art.* 12.

les points simples & les autres points multiples, & pour connoitre ces points doubles les uns des autres, j'ai cru qu'on ne me sauroit pas mauvais gré, si, par maniere de digression, je fais voir l'application de ces règles au point conjugué, ou ovale infiniment petite, sur un exemple déja connu.

EXEMPLE.

LVIII. * On demande si la courbe, dont la nature est exprimé par cette équation $pyy - 2cpy + pcc = x^3 - 4axx + 5aax - 2a^3$, a un point double, & quelle est la nature de ce point double, si c'est un point d'intersection de deux branches, un point de rebroussement, ou si c'est un point conjugué (l'indéterminée (x) représente les abscisses AP, & l'indéterminée (y) les ordonnées PZ de cette courbe).

1°. Quand AP (x) $= a$, il reste l'égalité $pyy - 2cpy + pcc = o$, dont les deux racines sont $y = c$, $y = c$; & cette valeur de l'indéterminée (y) étant substituée dans l'équation de la courbe, il vient l'égalité $x^3 - 4axx + 5aax - 2a^3 = o$, qui a trois racines réelles, dont deux sont égales entre elles, & de même signe, ces deux racines égales sont $x = a$, $x = a$. Or (*par l'Art.* 51) quand les égalités désignées par (L) & par (A), (qui sont ici les égalités $pyy - 2cpy + pcc = o$, & $x^3 - 4ax^2 + 5aax - 2a^3 = o$) ont l'une & l'autre deux racines réelles, égales & de mê-

* Fig. 20.

même figne, la courbe, dont la nature eſt exprimée par l'équation (D), qui dans cet exemple particulier eſt réduite à l'équation $pyy-2pcy+pcc=x^3-4axx+5aax-2a^3$, a un point double, & à ce point double, l'abſciſſe AP (x) eſt à l'ordonnée PZ (y) :: $a:c$; donc, ſi l'on prend $AB=a$, & ſur la droite BM, parallele à l'ordonnée principale GL, la partie $BM=c$, le point M ſera le point double de la courbe, dont la nature eſt exprimée par l'équation $pyy-2pcy+pcc=x^3-4axx+5aax-2a^3$. *Ce qu'il falloit montrer en premier lieu.*

2°. Pour connoitre maintenant la nature de ce point double M, c'eſt-à-dire, s'il eſt un point d'interſection, ou un point de rebrouſſement, ou une ovale infiniment petite *; on differentiera deux fois l'équation $pyy-2pcy+pcc=x^3-4axx+5aax-2a^3$, ſuivant l'Art. 163 de l'Analyſe des Infiniment-petits, & les méthodes de M. Bernoulli, & la ſeconde differentiation donnera $pdy^2=3xdx^2-4adx^2$, d'où l'on tire $\frac{dy^2}{dx^2}=\frac{3x-4a}{p}$, & enſuite $\frac{dy}{dx}=\frac{\pm\sqrt{3x-4a}}{\sqrt{p}}$. Mais au point double M, on a $x=a$ †: Donc, en ce point double M, on a $\frac{dy}{dx}=\frac{\pm\sqrt{-a}}{\sqrt{p}}$. Or $\sqrt{-a}$ eſt un grandeur imaginaire; donc au point double

* *Art 52.*

† *Par le nombre précédent du préſent Article.*

ble M, les tangentes de la courbe ſont imaginaires, quoique les coordonnées GB, BM ſoient réelles : donc * ce point double M eſt une ovale infiniment petite, ou un point conjugué. *En effet cette courbe eſt celle qui, dans l'énumeration des lignes du troiſieme ordre de M. Newton, eſt la 69. eſpece, que ce célébre Géometre dit avoir un point conjugué. J'ai préféré cet exemple, quoique connu, & pris parmi les lignes du troiſieme ordre, afin de faire voir la liaiſon de mes principes, avec les vérités qui ont été publiées par d'autres.*

REMARQUE II.

LIX. On a dit dans la neuvieme définition †, que l'ovale infiniment petite conjuguée, étant un point double, lorſqu'une ovale infiniment petite, au lieu d'être conjuguée, eſt adhérante à une des branches de la courbe, elle doit former un point triple dans l'endroit où elle eſt adhérante à la courbe : & on l'a nommée *point triple inviſible*, par la raiſon que l'on ne voit pas, lorſque la courbe eſt décrite ſur le plan, ce qui cauſe la triplicité de ce point qui n'eſt ſenſible que dans l'équation de la courbe. Je ne crois pas que perſonne ait jamais parlé de ces eſpeces de points triples, c'eſt ce qui m'engage à m'étendre un peu ſur leur formation.

Cette ſingularité, qui ne ſe rencontre pas dans les lignes qui ſont au deſſous du quatrieme ordre, vient de ce que les lignes du qua-

trie-

* *Art. 20. & 21.* † *Art. 15.*

trieme ordre & celles d'un ordre supérieur peuvent avoir sur une même branche finie ou infinie *AMmZ* *, une ovale *Mφmδε* coupée par cette branche en deux points *M* & *m*. Cette ovale, qu'on peut nommer *ovale adhérante*, fait partie de la courbe à laquelle elle est adhérante, & les points *M* & *m*, où elle est coupée par la branche finie ou infinie *AMmZ*, sont les points doubles de la courbe *ZmMANνXV* à laquelle elle appartient, dont on suppose ici que *GQ* est l'axe, & *GL* l'ordonnée principale.

Soit *δ* le point de l'ovale adhérante où la tangente est parallele à l'axe: *φ* le point de cette même ovale où la tangente est parallele à l'ordonnée principale *GL*, ensorte que la droite *Qδ* soit le *maximum* de l'ovale, parallele à l'ordonnée principale, & la droite *Eφ* son *maximum* parallele à l'axe: soit de plus la droite indéfinie *GM* menée par les points *G* & *M*, il est constant que cette droite *GM* doit couper l'ovale, non seulement au point *M*, mais encore en un autre point comme *γ*, puisque cette ovale est une portion de courbe rentrante en elle-même.

Si l'on conçoit maintenant que les droites *Mδ* & *Mφ* deviennent infiniment petites, il est constant que les points *M* & *δ*, *M* & *φ*, seront infiniment près l'un de l'autre, aussi-bien que les points *M* & *m* & les point *M* & *γ*: en un mot il est clair que l'ovale sera infiniment petite, & qu'elle n'occupera plus sur la branche *AMmZ* qu'un espace infiniment pe-

* Fig. 38.

petit, enforte qu'elle fera invifible fur le plan.

Néanmoins la droite $Q\delta$ coupera toujours la courbe & au point M où eft le nœud, & au point δ qui fera infiniment près de M: de même $E\phi$ coupera la courbe & au point double M & au point fimple ϕ, qui fera infiniment près de M. D'où il fuit 1°. que la droite GE (g) fera équivalente à trois racines égales de l'égalité marquée par (L)*, favoir à deux racines égales à caufe du nœud M, & à une troifieme racine qui ne differera des autres que d'une quantité infiniment petite égale à $M\delta = E\epsilon$, c'eft-à-dire, qui dans le fini n'en differera point. Par la même raifon la droite GQ (R) fera équivalente à trois racines égales de l'égalité marquée par (A)†, dont deux feront correfpondantes au nœud M, & la troifieme au point ϕ, laquelle par conféquent ne differera des deux autres que d'une quantité infiniment petite égale à $M\phi = Qq$, c'eft-à-dire, qu'elle n'en differera point dans le fini, enforte qu'il y aura dans l'égalité (A) trois racines parfaitement égales.

Enfin fi l'on tranfporte l'origine des coordonnées de G en M pour avoir, au-lieu de l'équation qui fe rapporte à l'équation générale marquée par (D), celle qui fe rapportera à l'équation générale marqué par (Δ)‡, & que de cette derniere équation on en déduife, fuivant ce qui eft dit ci-deffus, l'éga-

* *Art.* 49. *Voyez la Table.* † *Art. id.*
‡ *Art. id. V. la Table.*

l'égalité marquée par (2 K) *, dont les racines donnent les points d'interſection de la courbe $ZmMANnXV$ & de la droite GM, il eſt clair que cette égalité (2 K) aura trois racines égales à zero; ſavoir deux, à cauſe du point double M, où la droite GM coupe la courbe, & une troiſieme, à cauſe du point γ qui n'eſt diſtant de M, origine des x & des z, que d'une grandeur infiniment petite.

Ainſi, dans les lignes du quatrieme ordre, ou d'un ordre ſupérieur au quatrieme, qui ont des ovales infiniment petites adhérantes à une de leurs branches, les équations algébriques, qui expriment la nature de ces courbes, doivent faire connoitre l'exiſtence & la ſituation de ces ovales par des ſymptomes, s'il eſt permis de parler ainſi, pareils à ceux des courbes qui ont des points triples, dont la triplicité dépend de l'interſection de trois branches finies ou infinies de la même courbe : *ce que j'avois à faire remarquer ici, pour ne laiſſer aucun doute ſur la neuvieme Définition.*

EXEMPLE.

LX. Soit la courbe $ZmMANnXV$ †, dont la nature eſt exprimée par l'équation marquée par le chiffre (1)

$$(1). \; ay^3 - 3aey^2 - acyy + 3aeey + 2acey - ae^3 - ace^2 = \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{3}bx^3 + \tfrac{1}{2}abx^2 + \tfrac{1}{2}a^2x^2 - \tfrac{1}{12}a^4 - \tfrac{1}{6}be^3 - \tfrac{2}{3}ax^3$$

dans

* *Art. id.* † Fig. 39

dans laquelle on suppose $c = \frac{b\sqrt[3]{ab + 2aa}}{2\sqrt[3]{2a}}$ & $a > b$.

La droite GQ, qui s'étend à l'infini de part & d'autre du point G, est l'axe de la courbe sur laquelle on prend les x positifs du côté de Q, & les x négatifs du côté de B: la droite GL, qui coupe GQ à angle quelconque au point G, est l'ordonnée principale de la courbe, ou l'axe des y: l'origine de ces indéterminées x & y est en G.

Cette courbe n'a que deux branches qui s'étendent à l'infini de part & d'autre de la droite GL, & ces deux branches se réunissent en A, où la courbe coupe l'ordonnée principale GL parallelement à l'axe GQ: la branche $ZmMA$, qui s'étend à l'infini du côté des x positifs, est chargée d'une ovale $M\mu\varphi m\delta\varepsilon M$, qu'elle traverse de M en m: la branche $ANnXV$, qui s'étend à l'infini du côté des x négatifs, forme deux *sinuosités* KNn, NnX, dont les sommets N & n ont des tangentes NB, nb, paralleles à l'ordonnée principale GL.

Après avoir pris du côté où les x sont positifs $GQ = a$ $G2Q = a + b$, $Gq = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}\sqrt{4aa + 10ba + 4bb}$, & $G2q = \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}\sqrt{4aa - 2ab - 2bb}$, & du côté où les x sont négatifs, $GB = -\frac{1}{3}a - \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}\sqrt{4aa + 10ba + 4bb}$, & $Gb = \frac{1}{3}b - \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}\sqrt{4aa - 2ab - 2bb}$, on élevera des points Q, $2Q$, q, $2q$, les quatre droites $Q\delta$, $2Qm$, $q\pi$ & $2q\varepsilon$ paralleles à l'ordonnée principale GL, & ensuite des points B & b les droites

BX,

BX, bn, paralleles aux premieres; cela fait, si l'on prend sur la droite $Q\delta$ la partie $QM = e$, le point M sera un de ceux où la branche $AMmZ$ coupe l'ovale $M\mu\phi m\delta\varepsilon M$: si l'on prend $M\delta$ (de l'autre côté du point M par rapport au point Q) tel que $M\delta$, soit $= c = \frac{b\sqrt[3]{9b+18a}}{2\sqrt[3]{2a}}$, le point δ sera un des points de l'ovale où la tangente est parallele à l'axe: si l'on prend, sur la droite $2Qm$ le point m, tel que $2Qm = e + \frac{2}{3}c$, ce point m sera le 2d point où la branche $AMmZ$ coupe l'ovale $M\mu\phi m\delta\varepsilon M$: & si, sur cette même droite $2QM$, on prend $2Q\mu = e - \frac{1}{3}c$, le point μ sera l'autre point de l'ovale où la tangente est parallele à l'axe; enfin, si par les points M & m, on tire les droites $M\phi$, $m\varepsilon$, paralleles à l'axe GQ, le point ϕ où la premiere droite $M\phi$ coupera la droite $q\pi$, sera un des points de l'ovale où la tangente est parallele à l'ordonnée principale GL, & le point ε où la seconde droite $m\varepsilon$ coupe la droite $2q\varepsilon$, sera le second point de l'ovale où la tangente est parallele à la même ordonnée principale GL, c'est-à-dire, que $q\phi$ & $2q\varepsilon$ seront tangentes de l'ovale, l'une au point ϕ, l'autre au point ε, ensorte que si l'on prolonge les tangentes de l'ovale aux points δ & μ jusqu'à ce qu'elles rencontrent la droite $q\pi$, l'une au point π, l'autre au point ξ, l'ovale se trouvera renfermée d'un côté entre les droites $2q\varepsilon$, $q\pi$, & de l'autre entre les droites $\delta\pi$, $\mu\xi$.

Si l'on prend sur la droite BX la partie

BN

$BN = e$ & la partie $BX = e + c$, le point N fera le fommet de la premiere finuofité KNn de la branche $ANnXV$, auquel la tangente eft parallele à l'ordonnée principale GL, & le point X fera l'extrémité de la feconde finuofité NnX de la même branche $ANnXV$: de même fi l'on prend fur la droite bn la partie $bn = e + \frac{2}{3}c$, & la partie $bK = e - \frac{1}{3}c$, le point n fera le fommet de la feconde finuofité NnX de la branche $ANnXV$, auquel la tangente eft parallele à l'ordonnée principale GL, & le point K fera l'extrémité de la premiere finuofité KNn de la même branche $ANnXV$. Enfin fi du point E, où la droite MN, parallele à l'axe, coupe l'ordonnée principale GL, on prend, fur cette même droite GL, la partie EA égale à la racine réelle de cette égalité $W^3 - cW^2 + \frac{1}{12}a^3 + \frac{1}{6}aab = 0$, en allant de E vers G, parce que cette racine eft négative, on aura le point A, où les deux branches $ZmMA$, $VXnNA$, s'uniffent, en coupant l'ordonnée principale GL parallelement à l'axe GQ.

Tout cela n'eft qu'une fuite des principes qu'on a démontrés jufqu'ici, le calcul même n'en eft pas fort difficile, je l'omets ici (parce qu'il ne ferviroit qu'à allonger) pour en venir à la formation des *points triples invifibles*.

Tout ce qu'on vient de dire étant donc fuppofé, il eft vifible que la grandeur de l'ovale $M\Phi m\delta\epsilon Me$ dépend des grandeurs de la droite $M\varphi\,(\frac{2}{3}b - \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}\sqrt{4aa + 10ba + 4bb})$ &

& de la droite $M\delta$ $\left(c = \frac{b\sqrt[3]{9b + 18a}}{12\sqrt[3]{2a}}\right)$. Ces droites étant donc, pour ainsi dire, les parametres de cette ovale, si la droite $Q2Q$ (b) est supposée infiniment petite, $M\varphi$ devient en même tems infiniment petite : car $Q2Q$ (b) étant alors $= 0$ par rapport à GQ (a), on a $M\phi = -\frac{2}{3}a + \frac{2}{3}a = 0$, la droite $M\delta$ $\left(c = \frac{b\sqrt[3]{9b + 18a}}{2\sqrt[3]{2a}}\right)$ devient aussi infiniment petite ou égale à zero par rapport à GQ (a) : ainsi l'ovale $M\mu\varphi m\delta\epsilon M$ devient une ovale infiniment petite, mais elle demeure toujours adhérante à la branche $AMmZ$ *.

A l'égard de ce qui arrive à la branche $ANnXV$, quoique cela ne soit pas du sujet dont nous traitons dans cet Article, il n'est pas hors de propos de faire remarquer, en passant, que les deux sinuosités KNn, NnX, deviennent infiniment petites, & se changent en une inflexion parallele à l'ordonnée principale : mais je m'attache uniquement ici à la branche $ZmMA$, sur laquelle l'ovale (comme on a déja dit) devient infiniment petite, & par conséquent invisible sur le plan.

Quoique cette ovale soit invisible, il en reste des marques dans l'équation : en effet lorsque $Q2Q$ (b) devient $= 0$, par rapport à GQ (a), l'équation de la courbe $ZmMANnXV$ se change en celle qu'on voit ici marquée par (2)... $ay^3 - 3aeyy + 3aeey - ae^3 = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}ax^3 + \frac{1}{2}aaxx - \frac{1}{12}a$, tous les termes, où les coëfficiens b &

* Fig. 40.

& c se rencontrent, devenant infiniment petits & par conséquent égaux à zero par rapport aux autres.

Maintenant si on cherche quelle doit être la valeur de GE ou $QM(y)$ au point Q auquel $x=a$, on trouve [a] l'égalité (L) qui est du troisieme degré, & qui a par conséquent trois racines;

$$(L) \ldots y^3 - 3eyy + 3eey - e^3 = 0$$

Ces trois racines sont réelles & égales entre elles, étant $y=e$, $y=e$, $y=e$; d'où il suit que $GE\,(g)=e$ est une racine triple de l'égalité (L), ce qui dénote en M [b], ou un point d'inflexion parallele à l'ordonnée principale, auquel QM seroit tangente, ou un point double [c] auquel QM est tangente, ou bien un point triple [d] auquel QM est sécante. Mais si l'on substitue dans l'équation (2), au-lieu de l'indéterminée (y) sa valeur e, pour connoitre [e] la nature du point M, on trouve l'égalité (A), qui étant du quatrieme degré, doit avoir quatre racines réelles ou imaginaires.

$$(A) \ldots \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{2}{3}ax^3 + \tfrac{1}{2}aaxx - \tfrac{1}{12}a^4 = 0.$$

Ces quatre racines sont réelles, & il y en a trois égales entre elles, & une quatrieme qui est inégale, car cette égalité donne $x=a$, $x=a$, $x=a$, & $x=-\tfrac{1}{3}a$; d'où il suit que $GQ\,(R)=a$ est une racine triple de l'égalité (A), & qu'il y a de l'autre côté de G une valeur de (x) qui est égale à $\tfrac{1}{3}GQ$, laquelle correspond à une racine triple de l'égalité (L),

a Art. 49. V. la Table. b Art. 8. n. 3.
c Art. 19. n. 1. d Art. 18. n. 2. e Art. 49. V. la Table.

(L), & par conſéquent qu'il y a en N [a] une inflexion parallele à l'ordonnée principale. *Ce que je remarque ſeulement en paſſant, pour faire voir l'uſage des règles qu'on a données ci-devant.* Revenons au point M dont il faut faire connoitre la nature.

On a trouvé que GE (g) $= e$ eſt une racine triple de l'égalité (L) ; d'où l'on a conclu que le point M pourroit être, ou un point dont l'inflexion ſeroit parallele à l'axe, ou un point double auquel QM ſeroit tangente, ou un point triple auquel QM ſeroit ſécante. Mais GQ (K) $= a$ eſt auſſi une racine triple de l'égalité (A), donc, 1°. le point M ne ſauroit être un ſimple point d'inflexion, (car il faudroit pour cela que GQ (a) ne fût qu'une racine ſimple de l'égalité marquée par (A)) [b]; 2°. ce même point M ne ſauroit être un point double avec rebrouſſement, (car GQ (a) ne ſeroit alors qu'une racine double [c] de l'égalité (A)). Donc il ne peut être qu'un point double ſans rebrouſſement, auquel QM & EM ſeroient tangentes [d], ou bien un point triple auquel QM & EM ſeront ſécantes.

Pour connoitre maintenant ſi ce point M eſt un point double, ou un point triple, on tranſportera l'origine des indéterminées de G en M, en prenant $u = y - e$, & $z = x - e$, ce qui transformera l'équation (2) en celle que l'on voit ici marquée par (Δ) [e].

$$(\Delta) \ldots 4au^3 = z^4 + \tfrac{4}{3}az^3.$$

Cela

a *Art.* 50. b *Art.* 50. *n.* 3.
c *Art.* 51. d *Art.* 53. e *Art.* 49. *V. la Table.*

Cela fait, par les points *G* & *M*, on tirera la droite *GM*, qui coupera la courbe en autant de points [a] qu'il y a de racines réelles dans l'égalité (2*K*) en y comprenant les points

$$(2K) \ldots z^4 + \tfrac{4}{3} a z^3 \left.\begin{matrix} \\ - 4ab^3 z^3 \end{matrix}\right\} = 0$$

doubles pour deux points, & les points triples pour trois.

Dans cette égalité (qui eſt donnée par la comparaiſon des triangles ſemblables *GIK*, *MP* 5 *M*, & dans laquelle *IK* (b) $= \frac{e}{a}$ [b] les quatre racines ſont $z = 0$, $z = 0$, $z = 0$, & $z = -\frac{4}{3} a + \frac{4e^3}{aa}$, enſorte qu'elle a trois de ces racines qui ſont égales à zero; d'où il ſuit que la droite *GM* ſécante en *M* ne ſauroit y être ſécante en un point double, (car il faudroit pour cela [c] qu'il n'y eût dans l'égalité (2 *K*) que deux racines égales à zero): donc le point *M* eſt un point triple, auquel *QM*, *EM*, & *GM* ſont ſécantes [d].

Mais on a vu ci-devant qu'en ce point *M*, il y a une ovale infiniment petite adhérante à la courbe, qui eſt inviſible ſur le plan: donc l'ovale infiniment petite, adhérante à une des branches de la courbe, eſt déſignée dans l'équation, qui exprime la nature de la courbe, par les mêmes ſymptômes que le point triple. Donc ces ovales infiniment petites adhérantes ſont des eſpeces de points triples in-

a *Art.* 33. & 49. b *Art.* 49. *V. la Table.*
c *Art.* 53. *n.* 1. d *Art. id.*

invisibles. *Ce qu'il falloit faire connoitre par cet exemple.*

Les points triples invisibles ou ovales infiniment petites adhérantes à une des branches de la courbe, ont tant de rapport avec les points triples visibles, formés par l'intersection de trois branches finies ou infinies de la même courbe; que si l'on cherche la tangente de la courbe au point où la triplicité est invisible, il faudra differentier trois fois, conformément à l'Article 46, pour avoir le rapport du dx au dy. Il s'agit donc de vérifier cette proposition par ce même exemple.

Soit donc toujours la courbe *ZMANV**, dont la nature est exprimée par l'équation marquée par (2)

(2)... $ay^3 - 3aey^2 + 3aeey - ae^3 = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}ax^3 + \frac{1}{2}a^2xx - \frac{1}{12}a^4$. En differentiant cette équation, on a

$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 - 2axx + aax}{3a \times \overline{yy - 2ey + ee}}$: si on demande le rapport de dx à dy au point M, où l'on a trouvé $x = a$, & $y = e$, il est visible que la substitution de x & de y dans la differentielle précédente donne $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, d'où il suit (par l'Art. 163 de l'Analyse des Infinim. petits) qu'il faut differentier séparément le numerateur & le dénominateur de cette fraction, cette seconde differentiation donne $\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{3xx - 4ax + aa}{6a \times \overline{y - e}}$: si on substitue dans cette seconde differentielle, au-lieu de x &

* Fig. 40.

x & de y, leurs valeurs au point M on aura encore $\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{0}{0}$, d'où il suit qu'il faut differentier une troisieme fois, suivant les méthodes de M^rs. Bernoulli & Saurin, cette troisieme differentiation donne $\frac{dy^3}{dx^3} = \frac{6x - 4a}{6a}$. Si on substitue dans cette troisieme differentielle, la valeur de x au point M, c'est-à-dire, a au-lieu de x, ou aura $\frac{dy^3}{dx^3} = \frac{6a - 4a}{6a} = \frac{1}{3}$, d'où l'on tire $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$, qui fait connoitre enfin que l'ordonnée QM au point M est à la soutangente QT en ce même point M, comme 1 est à $\sqrt[3]{3}$, c'est-à-dire, que $QT = e\sqrt[3]{3}$. Mais pour trouver cette valeur de la soutangente QT, il a fallu differentier trois fois, comme s'il y eût eu trois branches qui se fussent rencontrées en M. Donc pour trouver la valeur de la soutangente au point triple invisible M, il faut faire les mêmes operations que pour le point triple visible. *Ce que je m'étois proposé de faire connoitre en second lieu par cet exemple*

Avant de finir cet Article, il ne faut pas oublier de remarquer que la troisieme differentiation n'ayant fourni ici, au point M, que l'égalité $\frac{dy^3}{dx^3} = \frac{1}{3}$, qui ne sauroit avoir qu'une seule racine réelle, il s'ensuit qu'il n'y a au point M, qu'une seule tangente, ce qui

est encore une nouvelle preuve qu'il n'y passe qu'une seule branche de la courbe *ZMANV*. D'où l'on voit la difference qu'il y a entre un point triple invisible, & un point triple visible. Car si ce point triple *M* eût été formé par la rencontre de trois branches finies ou infinies de la courbe, la troisieme differentiation auroit fourni une égalité du troisieme degré qui auroit eu trois racines réelles, à cause des trois tangentes qui se seroient rencontrées au point *M*. *Difference que je m'étois proposé de faire remarquer en dernier lieu par cet exemple.*

EXAMEN CHYMIQUE

DES VIANDES

Qu'on employe ordinairement dans les Bouillons :

Par lequel on peut connoitre la quantité d'Extrait qu'elles fournissent, & déterminer ce que chaque Bouillon doit contenir de suc nourrissant.

Par M. GEOFFROY le Cadet

DE tous les Alimens, ceux qu'on tire des Végétaux devroient être les plus convenables aux malades, parce qu'ayant des principes moins dévelopés, ils semblent être les plus analogues à la Nature, comme M. Lémery l'a prouvé dans un de ses Mémoires:

ce-

Fig. 3.

Z e M N S P

Fig. 7.

X L Z M N RD P I

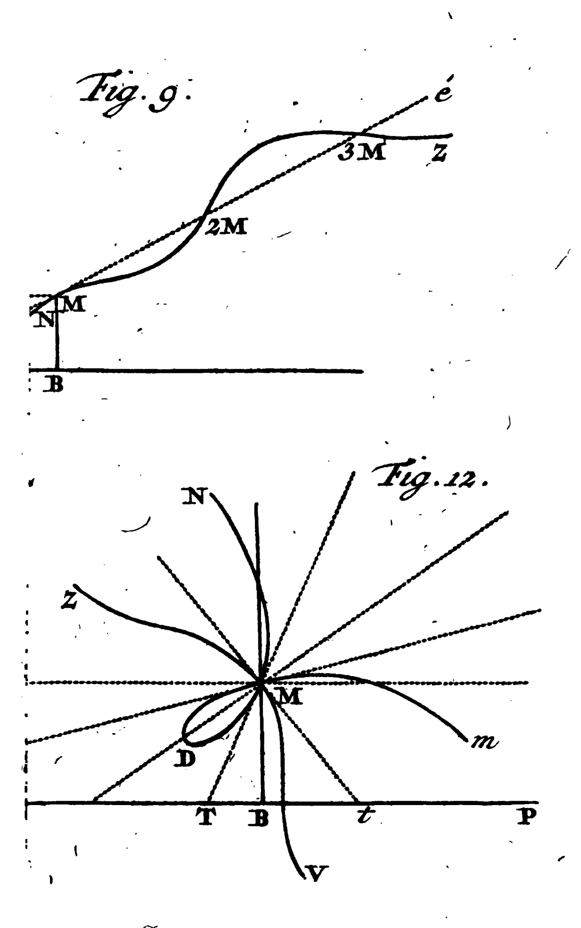

Fig. 9.
é
3M
Z
2M
M
N
B
Fig. 12.
N
Z
M
m
D
T
B
t
P
V

Fig. 14.

N
M
D
Z
T B P

Fig. 16.

Z
M
D
3 V
B θ 2 θ

Fig. 18.

Fig. 20.

Fig. 21. bis.

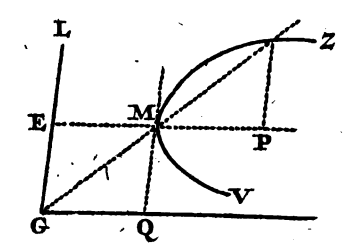
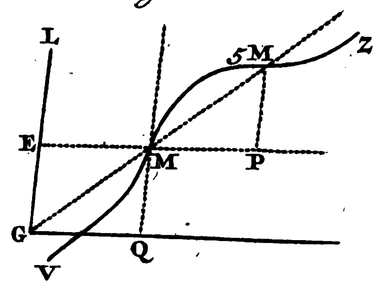


Fig. 22. bis.



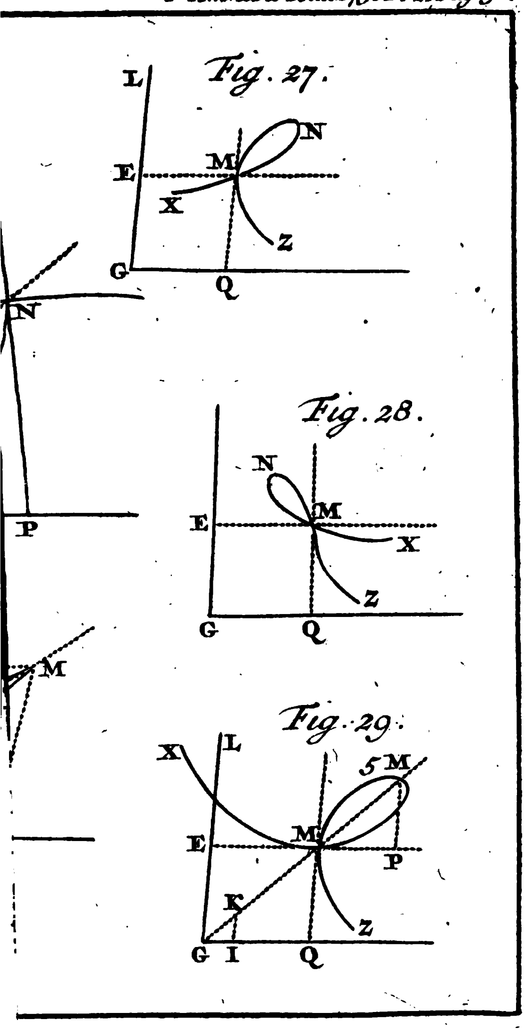


Fig. 27.
L
N
M
E
X
Z
G
Q
N
P
Fig. 28.
N
M
E
X
Z
G
Q
M
Fig. 29.
X
L
5 M
M
E
P
K
Z
G
I
Q

Fig. 35.

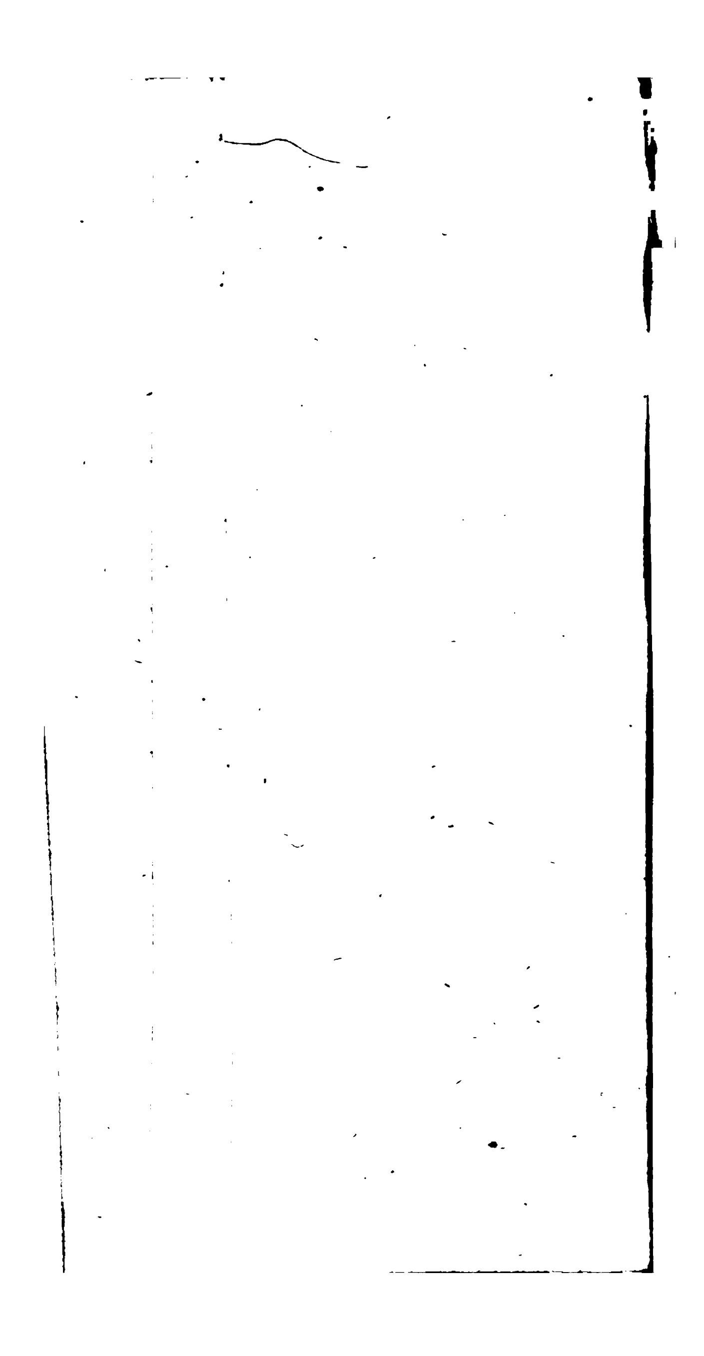
Fig. 34.

Fig. 37.

Z
C
5M
M
P
V
K
D
I
Q

Fig. 38.

X
5M
Z
M
P
K
D
C
G
I
Q



pendant le bouillon fait avec les Viandes,
la nourriture que l'usage a établi, & qui
sse généralement pour la plus saine & la

(2K)...

(3K)...

el Pel de a t e f l [illegible]

pendant le bouillon fait avec les Viandes, la nourriture que l'usage a établi, & qui sse généralement pour la plus saine & la nécessaire dans les cas de maladie, où est presque toujours la seule employée. Ce n'est que par l'examen des principes e cette nourriture contient, qu'on peut :e en état de la donner avec discernement, .n de ne pas courir le risque de la prescrire op forte dans les circonstances où la diete xacte est quelquefois le seul remede; ni trop oible, lorsque le malade exténué par une ongue maladie, a besoin d'une nourriture augmentée par degrés, pour réparer ses forces. C'est pour parvenir à des éclaircissemens utiles sur cette proportion, que j'ai fait l'analyse des Viandes qui sont le plus d'usage, ou qui contiennent un suc nourrissant regardé comme salutaire; telles que le Bœuf, le Veau, le Poulet, &c. Je n'ai entrepris cette recherche, que parce que l'analyse des Viandes n'a pas été portée aussi loin que celle des Plantes.

Feu M. Dodart, dont la mémoire est si respectable à l'Académie, & dont l'extrême exactitude est si connue, s'est contenté de dire en 1702*, qu'il tenoit de feu M. Bourdelin, que les chairs des Animaux bouillies en consommé, & ensuite mises à la distillation, ne rendoient pas moins de Sel volatil que si elles avoient été distillées crues. Comme il paroît qu'on a négligé de déterminer la quantité d'extrait que ces consommés laissoient

* *Hist. de l'Acad. des Sc. année 1702. p. 56.*

O 5

soient après l'évaporation, & ce que les Viandes pourroient avoir communiqué de leurs principes à l'eau, dans laquelle on les avoit fait bouillir; j'ai repris ce travail, afin d'ajouter aux analyses déja connues, cette partie négligée, qui est l'objet de ce Mémoire. Je me suis proposé d'y faire connoitre la quantité & la qualité des principes des chairs crues mises en distillation; ce qu'elles fournissent de principes aux extraits solides qu'on en tire par l'ébullition & l'évaporation; la difference essentielle des Sels volatils qu'on en tire; ce que les chairs dépouillées de leurs sucs & sechées contiennent encore de principes: enfin je déterminerai dans un autre Mémoire, ce que les os & les matieres osseuses peuvent fournir, dans la cuisson, d'extrait nourrissant.

CHAIR DE BOEUF.

Je commencerai par la chair de Bœuf: j'en ai pris une grosse piece de tranche, dont j'ai fait ôter la graisse, les os, les cartilages & les membranes; de cette piece de Bœuf j'ai fait couper plusieurs morceaux d'un poids égal de 4 onces. L'un de ces morceaux a été mis en distillation au Bain-Marie sans aucune addition. Il a fourni 2 onces 6 gros 36 grains de flegme ou d'humidité qui a passé dans le Récipient. La chair restée seche dans la cornue, s'est trouvée réduite au poids d'une once 1 gros 36 grains. Le flegme avoit l'odeur de bouillon; il a donné des marques de Sel volatil, puisqu'il a précipité en blanc la dissolu-

ſolution du Mercure ſublimé corroſif, comme les purs Sels volatils ont coutume de le faire; & le dernier flegme de la diſtillation en a donné des marques encore plus ſenſibles, en précipitant une plus grande quantité de la même diſſolution.

Cette chair deſſechée, qui peſoit 1 once 1 gros 36 grains, ayant été miſe dans une cornue au fourneau de reverbere pour l'analyſer, m'a donné d'abord un peu de flegme chargé d'Eſprit volatil, qui peſoit 1 gros 4 grains: enſuite 3 gros 46 grains de Sel volatil & d'Huile fétide épaiſſe qui n'a pu s'en ſéparer.

La Tête-morte ou la matiere reſtée dans la cornue, peſoit 3 gros 30 grains: c'étoit un charbon noir, luiſant & leger, qu'on a calciné dans un creuſet à feu très violent; la calcination l'a réduit en cendres, qui peſoient 40 grains. Ces cendres expoſées à l'air ſe ſont humectées, & ont augmenté de poids. Elles ont été leſſivées, & l'eau de leur leſſive éclaircie, n'a point donné de marques de Sel alkali, mais de Sel marin, puiſqu'elle a précipité en blanc la diſſolution du Mercure dans l'Eſprit de Nitre. Elle n'a cauſé aucun changement à la diſſolution du ſublimé corroſif, ſi ce n'eſt qu'après quelque tems de repos, il s'eſt formé au bas du vaiſſeau une eſpece de nuage, en forme de Coagulum leger: or nous ne connoiſſons juſqu'à préſent que les Sels qui ſont de la nature du Sel ammoniac ou le Sel marin, qui précipitent en blanc la diſſolution de Mercure par l'Eſprit de Nitre, & ſeulement les terres abſorbantes

animales que j'ai obſervé précipiter legerement la diſſolution du ſublimé corroſif.

Sur 4 onces de chair de Bœuf ſechée au Bain-Marie, j'ai verſé autant d'Eſprit de Vin bien rectifié; le tout eſt demeuré en digeſtion pendant un très long tems; l'Eſprit a tiré de cette Viande une foible teinture, il en a détaché quelques gouttes d'huile, la couleur qu'il a priſe étoit rouſſe avec une odeur fade: l'Huile de Tartre mêlée avec cet Eſprit en a dévelopé une odeur urineuſe, ſon mêlange avec la diſſolution de Mercure par l'Eſprit de Nitre a blanchi, il s'y eſt fait un précipité blanc-jaunâtre; puis cette liqueur eſt devenue ardoiſée, à cauſe du Sel ammoniacal urineux, dont l'Eſprit de Vin s'étoit imbu. L'eſſai de cet Eſprit de Vin, mêlangé avec la diſſolution du ſublimé corroſif, a produit un précipité blanc, qui eſt devenu un peu jaune; cette précipitation ne s'eſt faite dans ce dernier cas, que par le dévelopement d'une portion du Sel volatil urineux, qui a paſſé dans l'Eſprit de Vin avec le Sel ammoniacal.

Quatre onces de pareille chair de Bœuf ayant été cuites dans un vaiſſeau bien fermé, avec trois chopines d'eau, & la cuiſſon ayant été répétée ſix fois avec pareille quantité de nouvelle eau, pour tirer autant qu'il étoit poſſible tout le ſuc de cette Viande; j'ai raſſemblé tous ces bouillons, dont les derniers n'avoient plus qu'une odeur d'eau de Veau très legere. Je les ai fait évaporer à feu lent, je les ai filtrés vers la fin de l'évaporation, pour en ſéparer une portion terreuſe, & il eſt

eft resté dans le vaiſſeau un extrait médiocrement ſolide, qui s'humectoit à l'air très facilement, & qui s'eſt trouvé peſer 1 gros 56 grains. Ainſi il réſulte de cette expérience, que puiſque 4 onces de Bœuf bouilli donnent 1 gros 56 grains d'extrait, une livre de ſemblable chair de Bœuf bouillie doit fournir 7 gros 8 grains de pareil extrait, plus 11 onces 6 gros 64 grains de flegme, & 3 onces 2 gros de fibres dépouillées de tout leur ſuc. Ce produit peut varier, ſelon que l'animal aura été bien ou mal nourri dans de bons ou de mauvais herbages. Il peut varier auſſi, ſi la chair que l'on choiſit pour l'expérience eſt plus ou moins fraiche. Il faut remarquer que le bouillon fait d'une bonne chair de Bœuf, ne ſe met preſque jamais en gelée, ſi l'on ôte de la chair, les membranes, les tendons & les cartilages. Or j'entends par gelée, non l'extrait ci-deſſus, mais le bouillon qui ſe met de lui-même en une maſſe claire & tremblante lorſqu'il eſt froid.

L'extrait de cette chair de Bœuf, qui peſoit 1 gros 56 grains, a fourni dans ſon analyſe 1 gros 2 grains de Sel volatil, attaché aux parois du Récipient, non pas en ramifications, comme le font ordinairement les Sels volatils, mais en cryſtaux plats, formés la plupart en parallelépipedes; l'Eſprit & l'Huile qui ſont venus enſemble après le Sel volatil peſoient 38 grains. Le Sel fixe de Tartre, mêlé avec ce Sel volatil, a paru augmenter ſa force, ce qui pourroit faire ſoupçonner ce dernier d'être un Sel ammoniacal urineux; & ce ſoupçon eſt d'autant mieux

 fon-

fondé, que les cryſtaux de ce Sel volatil ſe forment à peu près comme ceux du Sel volatil de l'Urine, qu'on ſait être differens des autres Sels volatils tirés des chairs des animaux.

La Tête-morte ou le charbon reſté dans la cornue étoit très raréfié & très leger, il ne peſoit plus que 6 grains. Sa leſſive a précipité en blanc la diſſolution du Mercure, comme a fait la leſſive de la cendre de chair de Bœuf crue, dont j'ai parlé ci-deſſus.

Les 6 gros 36 grains de la maſſe des fibres de Bœuf deſſechées, analyſées de la même façon, ont rendu 2 gros d'un Sel volatil de la forme des Sels volatils ordinaires, & qui s'eſt attaché aux parois du Récipient en ramifications, & mêlé d'un peu d'Huile fétide aſſez épaiſſe, mais moins brune que celle de l'extrait qui a été tirée du bouillon. L'Eſprit qui étoit de couleur citrine, ſéparé de ſon huile, a peſé 36 grains. La Tête-morte peſoit 1 gros 60 grains.

La leſſive qu'on a faite après la calcination n'a pu alterer la diſſolution du Mercure par l'Eſprit de Nitre, parce que lorſqu'on a analyſé ces fibres de Bœuf deſſechées, elles étoient déja dénuées, non-ſeulement de tout leur Sel eſſentiel ammoniacal, mais encore de leur Sel fixe qui eſt de nature de Sel marin; puiſqu'elles ont paſſé pour la plus grande partie avec les Huiles dans l'eau pendant la longue ébullition de cette chair. Cette leſſive a ſeulement teint legérement de couleur d'Opale, la diſſolution du ſublimé corroſif, preuve qu'il y reſtoit encore une portion

tion huileuse: on sait que les matiers sulphureuses précipitent cette dissolution en noir, ou plutôt en violet foncé, dont la couleur d'Opale est un commencement.

On connoit donc par l'analyse de l'extrait des bouillons, que je viens de rapporter, qu'il passe dans l'eau pendant l'ébullition de la chair de Bœuf un Sel ammoniacal qu'on peut regarder comme le Sel essentiel de cette Viande, & qui paroît dans la distillation de l'extrait sous une forme differente de celui qu'on retire de la chair, lorsqu'on la distille crue, comme on a fait dans les analyses anciennes; & il y a apparence que c'est ce même Sel qui se sépare du Sang par les Urines après la nutrition, puisque le Sel volatil que j'ai retiré de cet extrait a beaucoup de rapport, comme je l'ai fait voir, avec celui qu'on retire de l'Urine par son analyse. Le Sel que l'on tire de l'extrait sera donc le produit de ce Sel ammoniacal naturel dans les Viandes, qui est plus facile à sublimer avec celui qui se tire ensuite des fibres: & l'on peut dire, après cette operation, que les Sels volatils sont presque toujours un produit du feu, puisque des principes si peu sensibles ne peuvent se déveloper qu'autant que la matiere se brule & se calcine par la violence du feu pour former le Sel volatil.

J'ai détaillé mes operations sur la chair de Bœuf, pour rendre un compte exact de mon travail, qui a été le même sur toutes les autres Viandes que j'ai examinées. Je ne repeterai point ces procedés dans la suite de ce Mémoire, de crainte d'être trop long.

CHAIR

CHAIR DE VEAU.

Quatre onces de chair, prife dans une Rouelle de Veau, diſtillée crue au Bain-Marie, comme la chair de Bœuf, a donné 2 onces 6 gros 54 grains d'humidité; la chair deſſechée peſoit 1 once 1 gros 18 grains, après avoir fourni ſes principes par l'analyſe. Le *Caput-mortuum* peſoit 2 gros 51 grains, ſa leſſive a donné des marques de Sel marin, comme l'a fait celle du Bœuf.

Quatre onces de pareille chair bouillie, ont fourni un bouillon un peu gélatineux: ce bouillon réduit en extrait en a laiſſé 2 gros 30 grains aſſez ſolide, quoique difficile à deſſecher: la maſſe des fibres deſſechées s'eſt trouvée réduite au poids de 5 gros 62 grains. Ainſi une livre de Rouelle de Veau contient 11 onces 6 gros 64 grains de flegme, une once un gros 48 grains d'extrait, & 2 onces 7 gros 32 grains de fibres deſſechées ou entierement dépouillées de leur ſuc.

En comparant les produits de ces premieres operations faites ſur la chair de Bœuf & ſur celle de Veau, je trouve que le Veau a, par poids de 4 onces, 18 grains de flegme plus que le Bœuf; qu'il fournit 46 grains d'extrait de plus, & que ſes fibres deſſechées peſent 46 grains de moins. Ainſi puiſque ſes fibres deſſechées peſent moins que celles de Bœuf, puiſqu'on en tire plus de flegme & plus de parties gommeuſes, ne peut-on pas préſumer que les liqueurs qui circulent dans le corps du Veau, où elles ſont deſtinées non-ſeulement

ment à la nutrition, mais aussi à l'accroissement de l'Animal qui n'est pas encore parfait, doivent contenir des particules plus disposées à une prochaine solidité, que les liqueurs circulantes dans le corps du Bœuf où elles n'ont d'autre destination que celle de la nutrition. C'est aussi par cette raison que l'extrait qu'on tire de la chair de Veau devient plus ferme que celui de la chair de Bœuf, parce qu'il contient plus de ces particules gommeuses destinées à devenir solides pour prolonger les os, les cartilages, les tendons, &c. Et il est impossible de donner la même fermeté à l'extrait de la chair de Bœuf, si l'on n'y joint pas dans la cuisson ses os, ses cartilages & ses membranes, qui ne sont, pour ainsi dire, qu'un composé de ces particules gommeuses.

Les 2 gros 30 grains d'extrait de chair de Veau m'ont donné par l'analyse un gros 12 grains tant en Esprit qu'en Huile & en Sel volatil, qui avoit le caractere urineux comme celui du Bœuf; la Tête-morte restée dans la cornue n'a pesé qu'un gros.

Les 5 gros 62 grains de la masse de fibres dessechées qui ont fourni l'extrait, étant mis de même au feu de réverbere, ont fourni un gros 66 grains de Sel volatil, qui portoit le caractere des Sels volatils ordinaires, c'est-à-dire, qu'il étoit en ramifications, & un gros 37 grains d'Huile & d'Esprit volatil; la Tête-morte restée dans la Cornue pesoit 2 gros 18 grains.

Je reprends ici les poids de ces Têtes-mortes ou charbons qui ne peuvent être sujets à erreur,

erreur, sur-tout par rapport à leur pesanteur. Celui de l'extrait de Bœuf ne pesoit que 6 grains, celui de l'extrait de Veau en pesoit 72, ainsi 66 grains de difference de poids entre ces deux charbons d'extraits.

Le charbon de fibres desséchées de Bœuf ne pesoit qu'un gros 60 grains, & celui du Veau, 2 gros 18 grains; autre difference de 30 grains.

Ces deux poids excédens, joints ensemble, donnent un total de 96 grains de parties, regardées comme solides, qui sont de plus dans le Veau que dans le Bœuf. Ces parties solides, jointes aux particules gommeuses dont j'ai parlé ci-dessus, qui sont destinées à devenir solides pour l'accroissement de l'Animal, étant numériquement beaucoup plus considerables dans le Veau que dans le Bœuf, ne pourroit-on pas conjecturer que si ces particules conservoient dans nos corps, lorsque nous les prenons pour nous nourrir, la même destination qu'elles semblent avoir dans le corps de l'Animal dont elles sont tirées, la chair de Veau seroit convenable aux enfans, parce qu'ils croissent, & aux malades qui ont souffert une déperdition ou un amaigrissement considerable; & que la chair de Bœuf conviendroit mieux aux adultes & aux personnes qui jouïssent d'une santé parfaite. Mais je ne donne ceci que comme une conjecture.

CHAIR DE MOUTON.

Quatre onces de chair de Mouton prise dans

dans cette partie qu'on nomme vulgairement l'*Eclanche*, mise en distillation au Bain-Marie comme le Bœuf & le Veau, ont donné 2 onces 6 gros 30 grains de flegme.

La chair dépouillée de son humidité, qui pesoit une once un gros 42 grains, distillée au feu de réverbere, après avoir fourni tous ses principes, a laissé dans la cornue un charbon qui ne pesoit que 2 gros 36 grains, & dont la lessive a donné des marques de Sel marin, c'est-à-dire, qu'elle n'a point alteré la dissolution du sublimé corrosif, & qu'elle a précipité en blanc la dissolution de Mercure.

Quatre onces de la même chair de Mouton bouillie a fourni 2 gros 58 grains d'extrait: ainsi une livre de pareille chair doit donner 11 onces 5 gros 32 grains de flegme, une once 3 gros 16 grains d'extrait, 2 onces 7 gros 24 grains de fibres dépouillées de leur suc.

Les 2 gros 58 grains d'extrait distillé au feu de réverbere ont fourni environ autant de Sel volatil que le Bœuf, & plus que le Veau; les crystaux en ont été mieux formés. La Tête-morte n'a plus pesé que 54 grains; sa lessive a donné des marques d'un Sel marin plus abondant que dans les autres Viandes.

Les fibres de ce Mouton étant sechées, après avoir fourni leur extrait, n'ont plus pesé que 5 gros 60 grains; ce qui prouve évidemment que le Mouton contient plus de parties nourrissantes & de principes volatils que le Bœuf & le Veau, puisqu'il laisse dans son analyse moins de matieres fixes. L'analyse de ces fibres a donné assez de Sel vo-

latil

latil ramifié, tel qu'il se trouve toujours dans l'analyse des fibres dessechées des Viandes: la Tête-morte a pesé 2 gros; sa lessive n'a que très peu donné de preuves de Sel marin avec les dissolutions mercurielles, parce que la plus grande partie des Sels se sont volatilisés, ou ont passé en ammoniac dans l'extrait.

POULET.

Le Poulet étant une des Viandes qu'on employe, ou séule, ou avec les autres Viandes ordinaires des bouillons, j'en ai fait un semblable examen; j'en ai pris un jeune qui pesoit 9 onces 4 gros 48 grains; après l'avoir concassé, on l'a fait bouillir dans plusieurs eaux, qui en ont tiré un extrait gélatineux pesant 7 gros 36 grains: la chair & les os dessechés à l'étuve comme les autres Viandes n'ont plus pesé qu'une once 6 gros 40 grains. Ainsi ce Poulet devoit contenir 6 onces 6 gros 44 grains d'humidité: j'en ai fait distiller séparément à feu de réverbere 6 gros 18 grains de la chair seche, & 3 gros 9 grains des os secs (qui est tout ce que j'en ai pu retirer): la chair m'a donné du Sel volatil en belles ramifications; la Tête-morte pesoit un gros 6 grains, la lessive de ce charbon n'a donné aucune marque de Sel.

Les os ont fourni, outre les autres principes, un peu de Sel volatil de la même figure que celui des extraits tirés des autres Viandes; la Tête-morte pesant 2 gros 8 grains,

n'a

n'a rien donné de remarquable dans les essais qu'on a fait de sa lessive.

L'extrait de la chair, qui pesoit 7 gros 36 grains, a fourni un Sel volatil figuré comme celui du Bœuf, mais qui n'est venu qu'en forçant le feu; la Tête-morte pesoit 2 gros 20 grains, sa lessive a donné des marques de Sel marin.

COQ.

Un vieux Coq, qui pesoit 2 livres 2 onces 6 gros, m'a donné 4 onces 7 gros 66 grains d'extrait gommeux, transparent & très sec.

CHAPON.

La chair d'un Chapon dégraissé, pesant une livre 7 onces 2 gros 48 grains, a fourni une once 5 gros d'extrait qui a eu peine à se secher.

PIGEONS.

Deux jeunes Pigeons de voliere, qui pesoient 14 onces, ont donné un extrait assez solide pour devenir sec, qui a pesé 7 gros 35 grains.

FAISAN.

Un Faisan, qui pesoit 2 livres, m'a donné un extrait salin qui n'a pu se dessecher suffisamment pour former un extrait solide, quoique

que je l'aye laissé très longtems à l'étuve; cet extrait pesoit 2 onces 4 gros 16 grains; ainsi cette chair fournit plus d'extrait que le Bœuf.

PERDRIX.

Deux Perdrix, pesant une livre 2 onces 5 gros, ont rendu une once six gros 30 grains d'extrait moins solide que celui du Faisan.

POULET D'INDE.

Un Poulet d'Inde, pesant 9 livres, a rendu 12 onces 43 grains d'un extrait assez solide, qui n'a pu se secher, & qui est toujours resté huileux & comme résineux.

Il résulte de tout ce que je viens de lire, que l'extrait tiré des Viandes bouillies, doit être regardé comme la partie nourrissante que fournit la chair des animaux dans les bouillons qu'on en fait; sans que je prétende pour cela qu'elle soit employée toute entiere à la nutrition, puisqu'elle contient encore des parties grossieres que l'action de la digestion en sépare comme inutiles par les voyes ordinaires, plus ou moins abondamment, suivant l'état du malade. Cela supposé, il faut faire voir ce qu'un malade prend de nourriture dans un bouillon ordinaire de demi-septier de liqueur.

Si, suivant l'usage, ce bouillon est fait d'une livre de tranche de Bœuf, d'une livre & demie de Rouelle de Veau, & d'une moitié

tié de Chapon, qui peut peser 14 onces; si toutes ces Viandes, pesant ensemble 3 livres 6 onces, sont cuites dans 3 pintes ½ d'eau, réduites à 3 chopines pour en faire six bouillons, qui doivent se mettre en gelée, lorsque la cuisson des Viandes est suffisante, ces six bouillons contiendront 2 onces 5 gros 34 grains d'extrait au moins; car l'extrait total de toutes ces Viandes seroit plus fort de 3 gros 12 grains, si on avoit répété l'ébullition, comme je l'ai fait, lorsque j'ai voulu avoir tout le suc nourrissant; & si le malade les prend tous les six dans les 24 heures, il aura pris par conséquent environ 2 onces 5 gros 34 grains d'une nourriture, qui, comparée avec le poids entier du pain & de la Viande qu'il peut manger en santé, paroît trop forte: ainsi, c'est à tort que le Vulgaire s'imagine que les malades ne sont pas suffisamment nourris par les bouillons.

Il y a même des circonstances où ils le seroient assez par les Eaux de Veau ou de Poulet, puisque la premiere, qui seroit faite avec une livre de Veau sur 2 pintes d'eau, réduites à moitié, contiendroit une once un gros 48 grains d'extrait; & que l'eau d'un Poulet qui peut peser 9 onces 4 gros & quelques grains, donne 7 gros 36 grains d'extrait. Il faut aussi faire remarquer que les Sels volatils & les Huiles de ces extraits, étendus dans les bouillons, sont plus développés, & qu'ils doivent passer plus vîte dans le sang, que ceux qui étant encore embarassés dans les fibres grossieres des Viandes, occupent plus longtems l'ac-

l'action de la digeſtion, ſans compter qu'il eſt plus aiſé d'unir à cette nourriture qu'à toute autre, le ſuc des Plantes qu'on juge à propos d'y joindre pour temperer ſon action dans le Sang.

Je ne répéterai point ici le rapport qu'ont entre eux les extraits des autres Viandes, parce que je joins à ce Mémoire une Table qui contient par colomnes les produits détaillés de toutes mes operations.

TABLE





